ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ для поступающих В ВУЗЫ

группа В

Под редакцией
М. И. СКАНАВИ

Москва
«Мир и Образование»
Минск
«Харвест»
2003

УДК 51(076.1)
ББК 22.11
П51

Полный сборник решений задач для поступающих в вузы.
П51 Группа В / Под ред. М. И. Сканави. — М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2003. — 608 с.: ил.

ISBN 5-9466-035-7 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-1169-3 (ООО «Харвест»)

Впервые в помощь абитуриентам публикуется полный сборник задач с решениями под редакцией М. И. Сканави по всем группам сложности.

Книги помогут учащимся научиться решать экзаменационные задачи различного уровня сложности любого вуза.

Условия и нумерация всех задач полностью соответствуют изданию *«Сборник задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией* М. И. Сканави, 6-е издание (М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование).

УДК 51(076.1)
ББК 22.11

ISBN 5-9466-035-7
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-1169-3
(ООО «Харвест»)

Решения к главе 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПОНЯТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ. ТОЖДЕСТВО И ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют *целым рациональным выражением*. Если кроме указанных действий входит действие деления, то выражение называют *дробно-рациональным*.

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются *рациональными*. Если входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют *иррациональным*.

Числовым значением алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

Действия над степенями

Действия над степенями производятся по нижеследующим правилам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{2.1}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};\qquad(2.2)$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{mn};\qquad(2.3)$$

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n;\qquad(2.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.\qquad(2.5)$$

Одночлен

Одночленом называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Одночлен есть частный случай многочлена.

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\qquad(2.6)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;\qquad(2.7)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\qquad(2.8)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;\qquad(2.9)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;\qquad(2.10)$$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3;\qquad(2.11)$$

$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3;\qquad(2.12)$$

$$(a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) = a^4 - b^4;\qquad(2.13)$$

$$(a-b)\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right) = a^5 - b^5;\qquad(2.14)$$

$$(a+b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right) = a^5 + b^5;\qquad(2.15)$$

$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+a^5)=a^6-b^6; \qquad (2.16)$$

$$(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)=a^7-b^7; \qquad (2.17)$$

$$(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)=a^7+b^7; \qquad (2.18)$$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=a^n-b^n, \qquad (2.19)$$

где n — любое целое число;

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=a^n+b^n, \qquad (2.20)$$

где $n=2k+1$, k — натуральное число;

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc; \qquad (2.21)$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc; \qquad (2.22)$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\\&+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd;\end{aligned} \qquad (2.23)$$

$$\begin{aligned}(a+b-c-d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\\&+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd;\end{aligned} \qquad (2.24)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c, \qquad (2.25)$$

где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

Формулы (2.16) — (2.24) остаются верными, если вместо одночленов a, b, c, d подставить любые выражения.

Многочлен $P_n(x)$ относительно переменной x вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_0,$$

где a_0, a_1, a_2, ... a_n — действительные числа и $a_0 \neq 0$, называется *многочленом, расположенным по убывающим степеням x,* или многочленом, представленным в *каноническом виде*.

Числа a_0, a_1, a_2, ... a_n называются его коэффициентами, одночлен a_0x^n — его *старшим членом,* a_0 — *свободным членом,* число n — *степенью многочлена* (n — натуральное число).

Корнями многочлена $P_n(x)$ будем называть такие значения переменной x, при которых многочлен $P_n(x)$ превращается в нуль.

Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ ($m \le n$) значит найти два таких многочлена $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, чтобы $P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x)$ и степень многочлена $R_k(x)$ была меньше степени делителя $Q_{mi}(x)$, т.е. $k<m$. При этом многочлен $S_{n-m}(x)$ называют частным, а многочлен $R_k(x)$ — остатком.

Для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ ($m\le n$ и $Q_m(x)\ne 0$) всегда найдется, и притом единственная пара многочленов $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x) \qquad (k<m),$$

т.е. если делитель не нуль — многочлен, то действие деления многочленов всегда выполнимо.

Теорема Безу. Если многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ разделить на двучлен $x-a$, то в остатке получим число R, равное значению данного многочлена при $x=a$, т.е. $R=P_n(a)$.

Схема сокращенного деления многочлена на двучлен. При делении многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$, расположенного по убывающим степеням x, на двучлен $x-a$ применяется метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера*.

Имеют место следующие формулы для нахождения коэффициентов частного $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и остатка R:

$$\begin{aligned}
&b_1=a_1+aa_0,\\
&b_2=a_2+ab_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2},\\
&R=a_n+ab_{n-1}.
\end{aligned}$$

Практически вычисление коэффициентов частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R проводится по следующей схеме (схеме Горнера).

Пусть требуется разделить многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+$ $+\ldots+a_0$ на двучлен $x-a$.

Значение a двучлена, коэффициенты многочлена ($b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$) и остаток запишем в следующей форме:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+$ $+ab_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+$ $+ab_{n-2}$	$\dots$	$b_0=a_1+ab_1$	$R=a_0+ab_0$

Отсюда записываем частное

$$Q_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0,$$

если $R=0$, и результат деления

$$P_n(x):(x-a)\equiv Q_{n-1}(x)+\frac{R}{x-a} \text{ или } P_n(x)\equiv(x-a)Q_{n-1}(x)+R,$$

если $R\neq 0$.

Понятие корня. Основные свойства корня

Алгебраические выражения, содержащие операцию извлечения корня, называются *иррациональными*.

Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a ($n\geq 2$). Обозначается $\sqrt[n]{a}$, где a — подкоренное выражение (или число), n — показатель корня ($n\geq 2; n\in N$).

По определению $\sqrt[n]{a}=b$, если $b^n=a$, или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

Основные свойства корня

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел, то:

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени из данного числа a, называется извлечением корня n-й степени из числа a, а результат извлечения корня в виде $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом*.

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

Арифметический корень и его свойства

Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени n ($n \geq 2; n \in N$) из положительного числа a называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т.е. $\sqrt[n]{a} = b$ есть арифметический корень, где $a \geq 0, b \geq 0$ и $b^n = a$.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа a и натурального числа n ($n > 1$) всегда найдется, и при том только одно, такое неотрицательное число b, что $b^n = a$.

Правила действий над корнями

Для любых действительных чисел a, b и c и натуральных n и k имеют место следующие правила действий над корнями:

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c} = \sqrt[2n+1]{abc}\,, \tag{2.26}$$

$$\sqrt[2n+1]{abc} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c}\,, \tag{2.27}$$

$$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \tag{2.28}$$

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} \quad (b \neq 0), \tag{2.29}$$

$$\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k = \sqrt[2n+1]{a^k}\,, \tag{2.30}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^k} = \left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k, \tag{2.31}$$

$$\sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a}\,, \tag{2.32}$$

$$\sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a} = \sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}}\,, \tag{2.33}$$

$$\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}\cdot\sqrt[2n]{c} = \sqrt[2n]{abc} \quad (a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0), \tag{2.34}$$

$$\sqrt[2n]{abc} = \sqrt[2n]{|a|}\cdot\sqrt[2n]{|b|}\cdot\sqrt[2n]{|c|} \quad (abc \ge 0), \tag{2.35}$$

$$\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}} = \sqrt[2n]{\frac{a}{b}} \quad (a \ge 0, b > 0), \tag{2.36}$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}} \quad \left(\frac{a}{b} \ge 0, b \ne 0\right), \tag{2.37}$$

$$\sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[2nk]{a} \quad (a \ge 0), \tag{2.38}$$

$$\sqrt[2nk]{a} = \sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} \quad (a \ge 0), \tag{2.39}$$

$$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^k = \sqrt[2n]{a^k} \quad (a \ge 0), \tag{2.40}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2k}} = \left(\sqrt[2n]{|a|}\right)^{2k} \ (a \text{ — любое действительное число}). \tag{2.41}$$

Во множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

Замена дробного выражения, у которого числитель *или* знаменатель (или оба) иррациональны, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется исключением иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения.

При исключении иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения числитель и знаменатель этого выражения умножают на множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения A называют всякое не равное тождественно нулю выражение B, которое в произведении с A не содержит знака корня, т.е. AB рационально.

Рассмотрим основные случаи исключения иррациональности из знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется исключение иррациональности из числителей):

1. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}}$, где $n > k, a > 0$, A — некоторое выражение; в качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно взять $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, так как $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$.

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, получим

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a} \quad (a > 0).$$

2. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

Выражения $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ взаимно сопряженные, так как $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$, поэтому

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{a - b} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A\sqrt{a}}{2a} = \frac{A\sqrt{b}}{2b}, \text{ если } a > 0, a = b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{a - b} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

3. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ и $\frac{A}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

Выражения $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$, а также $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ взаимно сопряжены, так как их произведения $(a + b)$ и $(a - b)$ рациональны. Поэтому исключить иррациональность из знаменателей указанных дробей можно следующим образом:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a+b\neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a\neq b$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b};$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a+b\neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{a-b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a\neq b$.

4. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ и $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$.

Для выражения $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=x^n-y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$, то получим

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b},$$

где $a \neq b$ ($a \geq 0, b \geq 0$, если n — четное; a, b — любые действительные числа, если n — нечетное).

Для выражения $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x+y)\left(x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots+x(-y)^{n-2}+(-y)^{n-1}\right)=x^n+(-1)^n y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a},\ y=\sqrt[n]{b}$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+(-1)^{n-1}b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[2k]{a}+\sqrt[2k]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[2k]{a^{2k-1}}-\sqrt[2k]{a^{2k-2}b}+\ldots+\sqrt[2k]{ab^{2k-2}}-\sqrt[2k]{b^{2k-1}}\right)}{a-b}$$

при $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$;

$$\frac{A}{\sqrt[2k+1]{a}+\sqrt[2k+1]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[2k+1]{a^{2k}}-\sqrt[2k+1]{a^{2k-1}b}+\ldots-\sqrt[2k+1]{ab^{2k-1}}-\sqrt[2k+1]{b^{2k}}\right)}{a+b},$$

где a и b — любые действительные числа и $a+b \neq 0$.

5. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Умножив знаменатель на $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, получим

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)=a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

Умножив последнее выражение на $a+b-c-2\sqrt{ab}$, найдем

$$\left((a+b-c)+2\sqrt{ab}\right)\left((a+b-c)-2\sqrt{ab}\right)=(a+b-c)^2-4ab.$$

Таким образом, множителем, сопряженным со знаменателем данной дроби, является $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\times\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)$. Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{(a+b-c)^2-4ab},$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, (a+b-c)^2-4ab \neq 0$.

Аналогично исключают иррациональность из знаменателей дробей

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Если знаменатель дроби — сумма четырех квадратных корней $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, причем $ab=cd$, то исключить иррациональность из знаменателя этой дроби можно так:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)}{a+b-c-d},$$

где $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0, a+b\neq c+d$.

6. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

Найдем сопряженный со знаменателем множитель. Для этого воспользуемся тождеством

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Если принять $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$, то

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)=a+b+c-3\sqrt[3]{abc}.$$

Умножив полученное выражение на

$$B=(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2},$$

получим

$$\left(a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\right)\cdot B=(a+b+c)^3-27abc.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\cdot B}{(a+b+c)^3-27abc}$$

при $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0, (a+b+c)^3\neq 27abc$.

Преобразование сложного квадратного корня (радикала)

Выражения вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ называются сложными квадратными корнями (радикалами). Для их преобразования пользуются формулой

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

где $A>0, B>0$ и $A^2-B>0$; знаки берутся либо только верхние, либо только нижние. В правильности этой формулы можно убедиться, возведя обе части формулы в квадрат. Эта формула упрощает сложный радикал, если A^2-B — точный квадрат.

Упростить выражения. Найти области допустимых значений параметров, если они не указаны (**2.312 – 2.356**):

2.312. $$\left(\frac{\frac{x^3-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^3+1}}{\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq\pm1.\end{cases}$

$$\left(\frac{\frac{x^3-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^3+1}}{\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{x^3-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^3+1}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{(x+1)(x^3+1)}{(x^3-1)x}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+2x+1-x}{x^2-2x+1+x}\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{(x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)x}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(x^2+x+1)(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)x(x-1)(x^2+x+1)x}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}}=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{x+1}{x}\right|=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, \text{если } x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;\infty);\\ -\frac{x+1}{x}, \text{если } x\in(-1;0).\end{cases}$$

Ответ: $\frac{x+1}{x}$, если $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$;

$-\frac{x+1}{x}$, если $x\in(-1;0)$.

2.313. $\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Раскрывая модули, имеем четыре случая:

1) $\begin{cases}x<-1,\\ \frac{-x^3+1-x-1}{x^3+x}=-1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-1\le x<0,\\ \frac{-x^3+1+x+1}{x^3+x}=\frac{-x^3+x+2}{x^3+x};\end{cases}$

3) $\begin{cases}0<x<1,\\ \frac{-x^3+1+x+1}{x^3+x}=\frac{-x^3+x+2}{x^3+x};\end{cases}$

4) $\begin{cases}x\ge 1,\\ \frac{x^3-1+x+1}{x^3+x}=\frac{x^3+x}{x^3+x}=1.\end{cases}$

Ответ: -1, если $x\in(-\infty;-1)$; $\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$, если $x\in[-1;0)\cup(0;1)$;
1, если $x\in[1;\infty)$.

2.314. $\left|x^2-1\right|+x\cdot\left|x+1\right|$.

Решение.

Раскрывая модули, получаем три случая:

1) $\begin{cases} x<-1, \\ x^2-1-x^2-x=-x-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1\le x<1, \\ -x^2+1+x^2+x=x+1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\ge 1, \\ x^2-1+x^2+x=2x^2+x-1. \end{cases}$

Ответ: $-(x+1)$, если $x\in(-\infty;-1)$; $x+1$, если $x\in[-1;1)$; $2x^2+x-1$, если $x\in[1;\infty)$.

2.315. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

Решение.

$\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}=\sqrt{(x-6)^2}-|x|=|x-6|-|x|$.

Раскрывая модули, получаем три случая:

1) $\begin{cases} x<0, \\ -x+6+x=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0\le x<6, \\ -x+6-x=-2x+6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\ge 6, \\ x-6-x=-6. \end{cases}$

Ответ: 6, если $x\in(-\infty;0)$; $6-2x$, если $x\in[0;6)$; -6, если $x\in[6;\infty)$.

2.316. $\left(x+2\sqrt{2x-4}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(x-2\sqrt{2x-4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение.

ОДЗ: $2\le x\ne 4$.

$$\left(x+2\sqrt{2x-4}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(x-2\sqrt{2x-4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}}{\sqrt{\left(x+2\sqrt{2x-4}\right)\left(x-2\sqrt{2x-4}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2-2\sqrt{2x-4}+2}+\sqrt{x-2+2\sqrt{2x-4}+2}}{\sqrt{x^2-\left(2\sqrt{2x-4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{x^2-8x+16}}=\frac{\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{(x-4)^2}}=$$

$$=\frac{\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{|x-4|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем два случая:

$$1)\ \begin{cases} 2\le x<4, \\ \dfrac{-\sqrt{x-2}+\sqrt{2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{-x+4}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4-x}; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x>4, \\ \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x-2}}{x-4}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{4-x}$, если $x\in[2;4)$; $\dfrac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$, если $x\in(4;\infty)$.

2.317. $$\left(\frac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\frac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right)^{\frac{1}{2}}:\frac{\sqrt{mn}}{m-2n}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} mn>0, \\ m\ne 2n. \end{cases}$

$$\left(\frac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\frac{2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}}{\frac{4}{mn}-\frac{1}{n^2}-\frac{4}{m^2}}\right)^{\frac{1}{2}}:\frac{\sqrt{mn}}{m-2n}=$$

$$=\left(\frac{4m^2n^2}{-(m-2n)^2}-\frac{\frac{m^2+2mn+n^2}{mn}}{\frac{-(m-2n)^2}{m^2n^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{m-2n}{\sqrt{mn}}=$$

$$=\left(\frac{-4m^2n^2+(m+n)^2mn}{(m-2n)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{m-2n}{\sqrt{mn}}=\sqrt{\frac{mn(m-n)^2}{(m-2n)^2}}\cdot\frac{m-2n}{\sqrt{mn}}=$$

$$=\frac{|m-n|\cdot\sqrt{mn}}{|m-2n|}\cdot\frac{m-2n}{\sqrt{mn}}=\frac{|m-n|}{|m-2n|}\cdot(m-2n).$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем три случая:

$$1)\ \begin{cases} mn>0, \\ m<n, \\ \dfrac{-(m-n)}{-(m-2n)}\cdot(m-2n)=m-n; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} mn>0, \\ n<m<2n, \\ \dfrac{m-n}{-(m-2n)}\cdot(m-2n)=n-m; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} m>2n, \\ \dfrac{m-n}{m-2n}\cdot(m-2n)=m-n. \end{cases}$$

Ответ: $m-n$ при $0<\frac{m}{n}\le 1$ и $\frac{m}{n}>2$; $n-m$ при $1<\frac{m}{n}<2$.

2.318. $\left(\sqrt{x^4-a^4}-\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > |a|, \\ x < -|a|. \end{array}\right. \end{cases}$

$$\left(\sqrt{x^4-a^4}-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\left(\sqrt{x^4-a^4}-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\left(\sqrt{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|x|}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-a^2}-\frac{x\cdot|x|}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^2}-x\cdot|x|}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\sqrt{x^2-a^2}=$$

$$=\left|x^2-a^2\right|-x\cdot|x|=\begin{cases} 2x^2-a^2 \text{ при } x<-|a|; \\ -a^2 \text{ при } x>|a|. \end{cases}$$

Ответ: $2x^2-a^2$ при $x<-|a|$; $-a^2$ при $x>|a|$.

2.319. $\left(\frac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq\pm1, \\ x\neq 2. \end{cases}$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем четыре случая:

$$1)\ \begin{cases} x<-1, \\ \left(\frac{-x+1}{x-1}\cdot x^2+2x\cdot\frac{x+1}{x+1}+2x-4\right):(-x+2)=\frac{-x^2+4x-4}{-x+2}= \\ \qquad =\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} -1<x<1, \\ \left(\frac{-x+1}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{x+1}{x+1}+2x-4\right):(-x+2)=\frac{-x^2-4}{-x+2}=\frac{x^2+4}{x-2}; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 1<x<2, \\ \left(\frac{x-1}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{x+1}{x+1}+2x-4\right):(-x+2)=\frac{x^2-4}{-(x-2)}= \\ \qquad =\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}=-(x+2); \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x>2, \\ \left(\frac{x-1}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{x+1}{x+1}+2x-4\right):(x-2)=\frac{x^2-4}{x-2}= \\ \qquad =\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2. \end{cases}$$

Ответ: $x-2$, если $x \in (-\infty;-1)$; $\dfrac{x^2+4}{x-2}$, если $x \in (-1;1)$; $-(x+2)$, если $x \in (1;2)$; $x+2$, если $x \in (2;\infty)$.

2.320. $\sqrt{\dfrac{\left(x^2-3\right)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

$$\sqrt{\frac{\left(x^2-3\right)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}=\sqrt{\frac{x^4-6x^2+9+12x^2}{x^2}}+$$

$$+\sqrt{x^2+4x+4-8x}=\sqrt{\frac{x^4+6x^2+9}{x^2}}+\sqrt{x^2-4x+4}=$$

$$=\sqrt{\frac{(x+3)^2}{x^2}}+\sqrt{(x-2)^2}=\frac{x^2+3}{|x|}+|x-2|=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{-x}-x+2=\dfrac{x^2+3+x^2-2x}{-x}=\dfrac{2x^2-2x+3}{-x} \text{ при } x<0;\\ \dfrac{x^2+3}{x}-x+2=\dfrac{x^2+3-x^2+2x}{x}=\dfrac{2x+3}{x} \text{ при } 0<x<2;\\ \dfrac{x^2+3}{x}+x-2=\dfrac{x^2+3+x^2-2x}{x}=\dfrac{2x^2-2x+3}{x} \text{ при } x\geq 2.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{-2x^2+2x-3}{x}$, если $x \in (-\infty;0)$; $\dfrac{3+2x}{x}$, если $x \in (0;2)$; $\dfrac{2x^2-2x+3}{x}$, если $x \in [2;\infty)$.

2.321. $\left(\dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{\left(a^2+2\right)^2-8a^2}$.

Решение.

ОДЗ: $a \geq 0$.

$$\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{\left(a^2+2\right)^2-8a^2}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{2^3}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{a^4+4a^2+4-8a^2}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2a}+2\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{a^4-4a^2+4}=$$

$$=\left(\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\right)^2+\sqrt{\left(a^2-2\right)^2}=(a-2)^2+\left|a^2-2\right|=$$

$$=\begin{cases} a^2-4a+4-a^2+2=-4a+6 \text{ при } 0 \leq a < \sqrt{2}; \\ a^2-4a+4+a^2-2=2a^2-4a+2=2\left(a^2-2a-1\right)=2(a-1)^2 \text{ при } a \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $6-4a$, если $a \in \left[0; \sqrt{2}\right)$; $2(a-1)^2$, если $a \in \left[\sqrt{2}; \infty\right)$.

2.322. $\sqrt{y^2-16y+9}-|y-9|+2$.

Решение.

$$\sqrt{y^2-16y+9}-|y-9|+2=\sqrt{(y-3)^2}-|y-9|+2=|y-3|-|y-9|+2.$$

Раскрывая модули, имеем три случая:

1) $\begin{cases} y<3, \\ -y+3+y-9+2=-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3 \leq y<9, \\ y-3+y-9+2=2y-10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \geq 9, \\ y-3-y+9+2=8. \end{cases}$

Ответ: -4, если $y \in (-\infty;3)$; $2y-10$, если $y \in [3;9)$; 8, если $y \in [9;\infty)$.

2.323. $\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\frac{1}{4x^{-1}}+\frac{2^{-2}}{x}+\frac{1}{2}}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

$$\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\frac{1}{4x^{-1}}+\frac{2^{-2}}{x}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{x}{4}-2}+\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2-8x+16}{4x}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4x}}=\sqrt{\frac{(x-4)^2}{4x}}+\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}=\frac{|x-4|}{2\sqrt{x}}+$$

$$+\frac{|x+1|}{2\sqrt{x}}=\frac{|x-4|+|x+1|}{2\sqrt{x}}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем два случая:

1) $\begin{cases} 0<x<4, \\ \dfrac{-x+4+x+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2\sqrt{x}}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\ge 4, \\ \dfrac{x-4+x+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x}}. \end{cases}$

Ответ: $\frac{5}{2\sqrt{x}}$, если $x\in(0;\,4)$; $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$, если $x\in[4;\,\infty)$.

2.324. $\sqrt{\frac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ne 0, \\ x\ne -1. \end{cases}$

$$\sqrt{\frac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|=\sqrt{\frac{x}{2+x+\frac{1}{x}}}+|x-1|=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{\frac{2x+x^2+1}{x}}}+|x-1|=\sqrt{\frac{x^2}{2x+x^2+1}}+|x-1|=$$

$$=\frac{|x|}{|x+1|}+|x-1|.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем четыре случая:

1) $\begin{cases} x<-1, \\ \dfrac{-x}{-x-1}-x+1=\dfrac{x}{x+1}-x+1=\dfrac{x-x^2+x-x+1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1<x<0, \\ \dfrac{-x}{x+1}-x+1=\dfrac{-x-x^2+x+1-x}{x+1}=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0<x<1. \\ \dfrac{x}{x+1}-x+1=\dfrac{x-x^2+x-x+1}{x+1}=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\geq 1, \\ \dfrac{x}{x+1}+x-1=\dfrac{x+x^2-1}{x+1}=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{1+x-x^2}{x+1}$, если $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$; $\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$, если $x\in[1;\infty)$;

$\dfrac{1-x-x^2}{x+1}$, если $x\in(-1;0)$.

2.325. $\dfrac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} n\neq 0, \\ n\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}=\frac{(n-1)(n+1)\left(n^2-2n+5\right)}{n(n-1)\left(n^2-2n+5\right)}=\frac{n+1}{n}.$$

Ответ: $\frac{n+1}{n}$ при $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

2.326. $$\frac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, \\ b \geq 0. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)^2}}{\sqrt{2a}\left(a+\sqrt{b}\right)-5\sqrt[3]{b}\left(a+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{a}}\cdot\left|\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right|}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{\frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cdot\left|\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right|}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)\cdot\left|\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right|}{\sqrt{a}\left(a+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{\left|\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right|}{\sqrt{a}\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{-\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}, \text{если } \sqrt{2a}<5\sqrt[3]{b}; \\ \dfrac{\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{2a}-5\sqrt[3]{b}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}, \text{если } \sqrt{2a}>5\sqrt[3]{b}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{a}}$ при $\sqrt{2a}>5\sqrt[3]{b}$; $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ при $\sqrt{2a}<5\sqrt[3]{b}$.

2.327. $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}$.

Решение.

$$\frac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}=\frac{(x-1)\sqrt{x^2-2x+1+4x}}{x^2+2|x|+1}=\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2}}{x^2+2|x|+1}=$$

$$=\frac{(x-1)\cdot|x+1|}{x^2+2|x|+1}.$$

Раскрывая модули, имеем три случая:

1) $\begin{cases} x<-1, \\ \dfrac{-(x-1)(x+1)}{x^2-2x+1}=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{x+1}{x-1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1\le x<0, \\ \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x+1}{x-1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\ge 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{x+1}{1-x}$, если $x\in(-\infty;-1)$; $\dfrac{x+1}{x-1}$, если $x\in[-1;0)$; $\dfrac{x-1}{x+1}$, если $x\in[0;\infty)$.

2.328. $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ne 0$.

$$\sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}}=\sqrt{\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2}+4}+\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{x^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^4-8x^2+16+16x^2}{4x^2}}+\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+8x^2+16}{4x^2}}+\frac{|x+2|}{|x|}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(x^2+4\right)^2}{4x^2}}+\frac{|x+2|}{|x|}=\frac{x^2+4}{2|x|}+\frac{|x+2|}{|x|}=\frac{x^2+4+2|x+2|}{2|x|}.$$

Раскрывая модули, получаем три случая:

1) $\begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{x^2+4-2(x+2)}{-2x}=\dfrac{x^2+4-2x-4}{-2x}=\dfrac{x^2-2x}{-2x}=\dfrac{2-x}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2\le x<0, \\ \dfrac{x^2+4+2(x+2)}{-2x}=\dfrac{x^2+4+2x+4}{-2x}=\dfrac{x^2+2x+8}{-2x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x>0, \\ \dfrac{x^2+4+2(x+2)}{2x}=\dfrac{x^2+4+2x+4}{2x}=\dfrac{x^2+2x+8}{2x}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{2-x}{2}$, если $x\in(-\infty;-2)$; $-\dfrac{x^2+2x+8}{2x}$, если $x\in[-2;0)$; $\dfrac{x^2+2x+8}{2x}$, если $x\in(0;\infty)$.

2.329. $\dfrac{\left||x|-1\right|\cdot|x|}{x^2-1}$.

Решение.

ОДЗ: $x\ne\pm1$.

Раскрывая модули, имеем четыре случая:

1) $\begin{cases} x<-1, \\ \dfrac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1<x<0, \\ \dfrac{-(x+1)x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{1-x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0 \le x < 1, \\ \dfrac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\dfrac{x}{x+1}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}; \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{x}{x-1}$, если $x \in (-\infty; -1)$; $\dfrac{x}{1-x}$, если $x \in (-1; 0)$; $-\dfrac{x}{x+1}$, если $x \in [0; 1)$; $\dfrac{x}{x+1}$, если $x \in (1; \infty)$.

2.330. $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{x^2 - 4|x-1|}$.

Решение. ОДЗ: $x \ne 2$, $x \ne -2 \pm 2\sqrt{2}$.

$$\frac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|} = \frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+4-8x}}{x^2-4|x-1|} = \frac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4|x-1|} =$$

$$= \frac{(x+2)\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-4|x-1|} = \frac{(x+2)\cdot|x-2|}{x^2-4|x-1|}.$$

Раскрывая модули, получаем три случая:

1) $\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x^2+4x-4} = -\dfrac{x^2-4}{x^2+4x-4} \text{ при } x^2+4x-4 \ne 0 \text{ или } x \ne -2 \pm 2\sqrt{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x^2-4x+4} = \dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} = -\dfrac{x+2}{x-2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2-4x+4} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} = \dfrac{x+2}{x-2}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{4-x^2}{x^2+4x-4}$, если $x\in(-\infty;1)$, $x\neq -2\pm 2\sqrt{2}$; $\dfrac{x+2}{2-x}$, если $x\in[1;2)$; $\dfrac{x+2}{x-2}$, если $x\in(2;\infty)$.

2.331. $\dfrac{\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{4}{3}}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\cdot x^{\frac{5}{6}}+25x^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$, $x\neq 1$.

$$\frac{\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{4}{3}}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\cdot x^{\frac{5}{6}}+25x^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3x^3}-\sqrt{3x})+(5\sqrt[3]{x^4}-5\sqrt[3]{x})}{\sqrt{(\sqrt{3x})^2+10\sqrt{3x}\sqrt[3]{x}+(5\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3x}(x-1)+5\sqrt[3]{x}(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{3x}+5\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{(x-1)(\sqrt{3x}+5\sqrt[3]{x})}{(\sqrt{3x}+5\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}}=\frac{x-1}{\frac{|x-1|}{|x|}}=\frac{(x-1)\cdot|x|}{|x-1|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем два случая:

1) $\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{(x-1)x}{-(x-1)}=-x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{(x-1)x}{x-1}=x.\end{cases}$

Ответ: $-x$ при $0<x<1$; x при $x>1$.

2.332. $\left(1-\frac{2}{x}-\left(\frac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\frac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\left(\frac{16-8x}{4-2x+x^2}-\frac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

$$\left(1-\frac{2}{x}-\left(\frac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\frac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\left(\frac{16-8x}{4-2x+x^2}-\frac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(1-\frac{2}{x}-\frac{(2x+x^2)(4-2x+x^2)+(2x-x^2)(4+2x+x^2)}{(4+2x+x^2)(4-2x+x^2)}:\right.$$

$$\left.:\frac{(16-8x)(4+2x+x^2)-(16+8x)(4-2x+x^2)}{(4-2x+x^2)(4+2x+x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(1-\frac{2}{x}-\frac{16x}{(4+2x+x^2)(4-2x+x^2)}:\frac{-16x^3}{(4-2x+x^2)(4+2x+x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(1-\frac{2}{x}-\frac{16x\cdot(4-2x+x^2)(4+2x+x^2)}{(4+2x+x^2)(4-2x+x^2)\cdot(-16x^3)}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}=\frac{|x-1|}{|x|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем три случая:

1) $\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{-(x-1)}{-x}=\dfrac{x-1}{x}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{-(x-1)}{x}=-\dfrac{x-1}{x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\geq 1, \\ \dfrac{x-1}{x}. \end{cases}$

Ответ: $\frac{x-1}{x}$, если $x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$; $\frac{1-x}{x}$, если $x \in (0; 1)$.

2.333. $\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12\right)^{\frac{1}{4}}:(z-1)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} z \neq 0, \\ z \neq 1. \end{cases}$

$$\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12\right)^{\frac{1}{4}}:(z-1)=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12\right)^{\frac{1}{4}}}{z-1}=$$

$$=\frac{\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^4-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+4-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12\right)^{\frac{1}{4}}}{z-1}=$$

$$=\frac{\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^4-8\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+16\right)^{\frac{1}{4}}}{z-1}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-4\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}{z-1}=\frac{\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}{z-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{z^2+2+\frac{1}{z^2}-4}}{z-1}=\frac{\sqrt{z^2-2+\frac{1}{z^2}}}{z-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}}{z-1}=\frac{\left|z-\frac{1}{z}\right|}{z-1}=\frac{\left|\frac{z^2-1}{z}\right|}{z-1}=\frac{\frac{\left|z^2-1\right|}{|z|}}{z-1}=\frac{\left|z^2-1\right|}{|z|\cdot(z-1)}=\frac{|(z-1)(z+1)|}{|z|\cdot(z-1)}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем четыре случая:

1) $\begin{cases} z<-1, \\ \dfrac{(z-1)(z+1)}{-z(z-1)}=-\dfrac{z+1}{z}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1\le z<0, \\ \dfrac{-(z-1)(z+1)}{-z(z-1)}=\dfrac{z+1}{z}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0<z<1, \\ \dfrac{-(z-1)(z+1)}{z(z-1)}=-\dfrac{z+1}{z}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} z>1, \\ \dfrac{(z-1)(z+1)}{z(z-1)}=\dfrac{z+1}{z}. \end{cases}$

Ответ: $-\dfrac{z+1}{z}$, если $z\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$; $\dfrac{z+1}{z}$, если $z\in[-1;0)\cup(1;\infty)$.

2.334. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, \\ -\sqrt[6]{a}\le b<\sqrt[3]{a^3-\sqrt{a}}. \end{cases}$

$$\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}=$$

$$=\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\left(a^{\frac{3}{2}}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}\right)}}{\sqrt{a^6+2a^3b^3+b^6-4a^3b^3-a}}=$$

$$=\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(\sqrt{b^3+\sqrt{a}}\right)^2}}{\sqrt{a^6-2a^3b^3+b^6-a}}=\frac{\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a^3-b^3-\sqrt{a}}}{\sqrt{\left(a^3-b^3\right)^2-a}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(a^3-b^3+\sqrt{a}\right)\left(a^3-b^3-\sqrt{a}\right)}}{\sqrt{\left(a^3-b^3+\sqrt{a}\right)\left(a^3-b^3-\sqrt{a}\right)}}=1.$$

Ответ: 1 при $a>0$, $-\sqrt[6]{a}\le b<\sqrt[3]{a^3-\sqrt{a}}$.

2.335. $\dfrac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}$, $\quad z=\dfrac{2a}{a^2+1}$.

Решение.

ОДЗ: $-1\le z\le 1$.

$$\frac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}=\frac{\left(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right)\left(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right)}{\left(\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}\right)\left(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right)^2}{\left(\sqrt{1+z}\right)^2-\left(\sqrt{1-z}\right)^2}=$$

$$=\frac{1+z-2\sqrt{1-z^2}+1-z}{1+z-1+z}=\frac{2-2\sqrt{1-z^2}}{2z}=\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4a^2}{a^4+2a^2+1}}}{\frac{2a}{a^2+1}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{\frac{a^4-2a^2+1}{a^4+2a^2+1}}}{\frac{2a}{a^2+1}}=\frac{1-\sqrt{\frac{\left(a^2-1\right)^2}{\left(a^2+1\right)^2}}}{\frac{2a}{a^2+1}}=\frac{1-\frac{\left|a^2-1\right|}{a^2+1}}{\frac{2a}{a^2+1}}=\frac{\frac{a^2+1-\left|a^2-1\right|}{a^2+1}}{\frac{2a}{a^2+1}}=$$

$$=\frac{a^2+1-\left|a^2-1\right|}{2a}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем три случая:

1) $\begin{cases}a<-1,\\ \dfrac{a^2+1-a^2+1}{2a}=\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{a};\end{cases}$

2) $\begin{cases} -1 \le a < 1, \\ \dfrac{a^2+1+a^2-1}{2a} = \dfrac{2a^2}{2a} = a \end{cases}$ при $a \ne 0$; отметим, что если $a = 0$, то $z = 0$ и данное выражение также равно нулю.

3) $\begin{cases} a \ge 1, \\ \dfrac{a^2+1-a^2+1}{2a} = \dfrac{2}{2a} = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{1}{a}$, если $a \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$; a, если $a \in [-1; 1)$.

2.336. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{\frac{3}{2}}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\cdot(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{6}}+x)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x+2y \ge 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 0, \\ y \ge -\dfrac{x}{2}. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{\frac{3}{2}}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\cdot(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{6}}+x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2(x+2y)}+\sqrt{x^3(x+2y)}-x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x(x+2y)})}\cdot x^{\frac{2}{3}}(1-x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}})} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x+2y}+x\sqrt{x(x+2y)}-\sqrt{x^3}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{2x+2y-2\sqrt{x(x+2y)}}\cdot\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}+1)} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x+2y}(1+\sqrt{x})-x\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2y-2\sqrt{x(x+2y)}+x}\cdot\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}+1)} =$$

$$=\frac{x\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^3}\left(\sqrt[6]{x^3}+1\right)\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}{\left|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right|\cdot\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}{\left|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right|\cdot\left(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}{\left|\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right|}.$$

Раскрывая модуль с учетом ОДЗ, имеем два случая:

$$1)\ \begin{cases} x>0, \\ y\ge -\dfrac{x}{2}, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{x}<0,\ \sqrt{x+2y}<\sqrt{x},\ x+2y<x,\ y<0, \\ \dfrac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}{-\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}=-\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right); \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{x}>0,\ \sqrt{x+2y}>\sqrt{x},\ x+2y>x,\ y>0, \\ \dfrac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2y}-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right). \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$, если $x\in(0;\infty)$, $y\in(0;\infty)$; $-\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$, если $x\in(0;\infty)$, $y\in\left[-\frac{x}{2};0\right)$.

2.337. $$\frac{\sqrt[3]{a-3+3\left(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2}\right)}}{\sqrt{2^{-2}-\frac{3}{2}a^{-1}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2}:\left(\sqrt[3]{9}+a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{3a}\right)}.$$

Решение.

ОДЗ: $a \neq 0,\ a \neq 3$.

$$\frac{\sqrt[3]{a-3+3(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2})}}{\sqrt{2^{-2}-\frac{3}{2}a^{-1}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2}:(\sqrt[3]{9}+a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{3a})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a-3+3\sqrt[3]{3a}(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{a})}}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{2a}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2}:((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{a^2})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{3})^3-3\sqrt[3]{3a}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})}}{\sqrt{\frac{a^2-6a+9}{4a^2}}:((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{a})^2)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{3})^2-3\sqrt[3]{3a})}}{\sqrt{\frac{(a-3)^2}{4a^2}}\cdot\frac{1}{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{a})^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})((\sqrt[3]{a})^2-2\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{3})^2)}}{\frac{|a-3|}{2|a|}\cdot\frac{1}{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{a})^2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})^2}}{\frac{|a-3|}{2|a|\cdot((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{a})^2)}}=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3})^3}\cdot|a|\cdot((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3a}+(\sqrt[3]{a})^2)}{|a-3|}=\frac{2\cdot|a|\cdot(a-3)}{|a-3|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем три случая:

1) $\begin{cases} a<0, \\ \dfrac{-2a(a-3)}{-(a-3)}=2a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0 < a < 3, \\ \dfrac{2a(a-3)}{-(a-3)} = -2a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} a > 3, \\ \dfrac{2a(a-3)}{(a-3)} = 2a. \end{cases}$

Ответ: $2a$, если $a \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$; $-2a$, если $a \in (0; 3)$.

2.338. $\dfrac{\sqrt[3]{8x - y - 6\left(2\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{xy^2}\right)} \cdot \left(4x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{8x\sqrt[3]{y} - y^{\frac{4}{3}}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} y \neq 0, \\ y \neq 8x. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt[3]{8x - y - 6\left(2\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{xy^2}\right)} \cdot \left(4x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{8x\sqrt[3]{y} - y^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(2\sqrt[3]{x}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 - 6\sqrt[3]{xy}\left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)} \cdot \left(4\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}{\sqrt[3]{y}(8x - y)} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(4\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right) - 6\sqrt[3]{xy}\left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)}}{\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)} \times$$

$$\times \frac{\left(4\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}{\left(4\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(4\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}}{\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}=\frac{\sqrt[3]{\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2}}{\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^3}}{\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}=\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, $y\neq 0$, $y\neq 8x$.

2.339. $\left(\frac{a}{3\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}-\left(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2.$

Решение.

$$\left(\frac{a}{3\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}-\left(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\frac{\sqrt{2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}}}{\sqrt{2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}}{2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{\left(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}\right)\left(2a^2+3-a\sqrt{4a^2+3}\right)}{\left(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}\right)\left(2a^2+3-a\sqrt{4a^2+3}\right)}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{\left(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}\right)\left(2a^2+1-a\sqrt{4a^2+3}+2\right)}{\left(2a^2+3\right)^2-\left(a\sqrt{4a^2+3}\right)^2}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{(2a^2+1)^2-(a\sqrt{4a^2+3})^2+2(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3})}{4a^4+12a^2+9-a^2(4a^2+3)}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{4a^4+4a^2+1-a^2(4a^2+3)+4a^2+2+2a\sqrt{4a^2+3}}{4a^4+12a^2+9-4a^4-3a^2}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{4a^4+4a^2+1-4a^4-3a^2+4a^2+2+2a\sqrt{4a^2+3}}{9a^2+9}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{5a^2+3+2a\sqrt{4a^2+3}}{9(a^2+1)}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{4a^2+3+2a\sqrt{4a^2+3}+a^2}{9(a^2+1)}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{4a^2+3}+a)^2}{9(a^2+1)}}\right)^2=\left(\frac{a}{3\sqrt{a^2+1}}-\frac{\sqrt{4a^2+3}+a}{3\sqrt{a^2+1}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a-\sqrt{4a^2+3}-a}{3\sqrt{a^2+1}}\right)^2=\left(-\frac{\sqrt{4a^2+3}}{3\sqrt{a^2+1}}\right)^2=\frac{4a^2+3}{9(a^2+1)}.$$

Ответ: $\frac{4a^2+3}{9(a^2+1)}$.

2.340. $\frac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$.

Решение.

ОДЗ: $a\geq 1,\ a\neq 2$.

$$\frac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1}+\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}}{\sqrt{a^2-4a-4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}}{\sqrt{(a-2)^2}}=\frac{\left|\sqrt{a-1}-1\right|+\sqrt{a-1}+1}{|a-2|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем два случая:

$$1)\ \begin{cases} 1\le a<2, \\ \dfrac{-\sqrt{a-1}+1+\sqrt{a-1}+1}{-(a-2)}=\dfrac{2}{2-a}; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} a>2, \\ \dfrac{\sqrt{a-1}-1+\sqrt{a-1}+1}{a-2}=\dfrac{2\sqrt{a-1}}{a-2}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{2}{2-a}$ при $1\le a<2$; $\dfrac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, при $2<a<\infty$.

2.341. $\dfrac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)\left(4z^3-2z^2+z\right)^{-1}}-\left(z^3-1\right).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} z\ne 0, \\ z\ne\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)\left(4z^3-2z^2+z\right)^{-1}}-\left(z^3-1\right)=\frac{\sqrt{16z^2+\dfrac{1}{z^2}-8}}{(2z-1)\cdot\dfrac{1}{4z^3-2z^2+z}}-\left(z^3-1\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{16z^4-8z^2+1}{z^2}}\cdot\left(4z^3-2z^2+z\right)}{2z-1}-\left(z^3-1\right)=\frac{\sqrt{\dfrac{\left(4z^2-1\right)^2}{z^2}}\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{2z-1}-$$

$$-\left(z^3-1\right)=\frac{\frac{\left|4z^2-1\right|}{|z|}\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{2z-1}-\left(z^3-1\right)=\frac{\left|4z^2-1\right|\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{|z|\cdot(2z-1)}-$$

$$-\left(z^3-1\right)=\frac{|2z-1|\cdot|2z+1|\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{|z|\cdot(2z-1)}-\left(z^3-1\right)$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем четыре случая:

$$1)\ \begin{cases} z<-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(2z-1)(2z+1)\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{-z(2z-1)}-z^3+1=-8z^3-1-z^3+1=-9z^3; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le z<0, \\ \dfrac{(2z-1)(2z+1)\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{z(2z-1)}-z^3+1=8z^3+1-z^3+1=7z^3+2; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 0<z<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{-(2z-1)(2z+1)\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{z(2z-1)}-z^3+1=-8z^3-1-z^3+1=-9z^3; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} z>\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(2z-1)(2z+1)\cdot z\left(4z^2-2z+1\right)}{z(2z-1)}-z^3+1=8z^3+1-z^3+1=7z^3+2; \end{cases}$$

Ответ: $-9z^3$, если $z\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$;

$7z^3+2$, если $z\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

2.342. $\dfrac{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$

Решение.

ОДЗ: $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x+5+4\sqrt{2x+1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+5-4\sqrt{2x+1}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2x+5+4\sqrt{2x+1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{2x+5-4\sqrt{2x+1}}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x+1+4\sqrt{2x+1}+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1-4\sqrt{2x+1}+4}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2x+1+4\sqrt{2x+1}+4}}-\dfrac{1}{\sqrt{2x+1-4\sqrt{2x+1}+4}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}-2\right)^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}-2\right)^2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+2}+\dfrac{1}{\left|\sqrt{2x+1}-2\right|}}{\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+2}-\dfrac{1}{\left|\sqrt{2x+1}-2\right|}}=\frac{\dfrac{\left|\sqrt{2x+1}-2\right|+\sqrt{2x+1}+2}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\cdot\left|\sqrt{2x+1}-2\right|}}{\dfrac{\left|\sqrt{2x+1}-2\right|-\sqrt{2x+1}-2}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\cdot\left|\sqrt{2x+1}-2\right|}}=$$

$$=\frac{\left|\sqrt{2x+1}-2\right|+\sqrt{2x+1}+2}{\left|\sqrt{2x+1}-2\right|-\sqrt{2x+1}-2}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем два случая:

1) $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{-\sqrt{2x+1}+2+\sqrt{2x+1}+2}{-\sqrt{2x+1}+2-\sqrt{2x+1}-2} = \dfrac{4}{-2\sqrt{2x+1}} = -\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}} \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } 2x+1>0, \text{ или } x > -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x > \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{2x+1}-2+\sqrt{2x+1}+2}{\sqrt{2x+1}-2-\sqrt{2x+1}-2} = \dfrac{2\sqrt{2x+1}}{-4} = -\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2}. \end{cases}$

Ответ: $-\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$, если $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$; $-\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2}$, если $x \in \left(\dfrac{3}{2}; \infty\right)$.

2.343. $\dfrac{\sqrt{4(x-\sqrt{y})+yx^{-1}} \cdot \sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y \ge 0, \\ y \ne 4x^2; \\ y \ne \dfrac{27x^3}{2}. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{4(x-\sqrt{y})+yx^{-1}} \cdot \sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4x-4\sqrt{y})+\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{(3x+\sqrt[3]{2y})^2}}{2x(3x+\sqrt[3]{2y}-\sqrt{y}(3x+\sqrt[3]{2y})} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4x^2-4x\sqrt{y}+y}{x}} \cdot (3x+\sqrt[3]{2y})}{(3x+\sqrt[3]{2y})(2x-\sqrt{y})} 3 =$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(2x-\sqrt{y}\right)^2}{x}}\cdot\left(3x+\sqrt[3]{2y}\right)}{\left(3x+\sqrt[3]{2y}\right)\left(2x-\sqrt{y}\right)}=\frac{\left|2x-\sqrt{y}\right|\cdot\left(3x+\sqrt[3]{2y}\right)}{\sqrt{x}\left(3x+\sqrt[3]{2y}\right)\left(2x-\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{\left|2x-\sqrt{y}\right|}{\sqrt{x}\left(2x-\sqrt{y}\right)}=\begin{cases}\dfrac{-\left(2x-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}\left(2x-\sqrt{y}\right)}=-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } y>4x^2 \text{ и } x>0;\\[2ex] \dfrac{2x-\sqrt{y}}{\sqrt{x}\left(2x-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } 0\le y<4x^2 \text{ и } x>0.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x>0,\ 0\le y<4x^2$; $-\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x>0,\ y>4x^2$.

2.344. $\sqrt{\frac{1}{6}\left(\left(3t+\sqrt{6t-1}\right)^{-1}+\left(3t-\sqrt{6t-1}\right)^{-1}\right)}\cdot|t-1|\cdot t^{-\frac{1}{2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\frac{1}{6}\le t\ne\frac{1}{3}$.

$$\sqrt{\frac{1}{6}\left(\left(3t+\sqrt{6t-1}\right)^{-1}+\left(3t-\sqrt{6t-1}\right)^{-1}\right)}\cdot|t-1|\cdot t^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3t+\sqrt{6t-1}}+\frac{1}{3t-\sqrt{6t-1}}\right)}\cdot\frac{|t-1|}{\sqrt{t}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3t-\sqrt{6t-1}+3t+\sqrt{6t-1}}{6\left(3t+\sqrt{6t-1}\right)\left(3t-\sqrt{6t-1}\right)}}\cdot\frac{|t-1|}{\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{6t}{6\left((3t)^2-\left(\sqrt{6t-1}\right)^2\right)}}\cdot\frac{|t-1|}{\sqrt{t}}=$$

$$=\sqrt{\frac{t}{9t^2-6t+1}}\cdot\frac{|t-1|}{\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{t}{(3t-1)^2}}\cdot\frac{|t-1|}{\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{t}}{|3t-1|}\cdot\frac{|t-1|}{\sqrt{t}}=\frac{|t-1|}{|3t-1|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем три случая:

1) $\begin{cases}\dfrac{1}{6}\le t<\dfrac{1}{3},\\[2ex] \dfrac{-(t-1)}{-(3t-1)}=\dfrac{t-1}{3t-1};\end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{3} < t < 1, \\ \frac{-(t-1)}{3t-1} = -\frac{t-1}{3t-1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} t \ge 1, \\ \frac{t-1}{3t-1}. \end{cases}$

Ответ: $\frac{t-1}{3t-1}$, если $t \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right) \cup [1; \infty)$; $\frac{1-t}{3t-1}$, если $t \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

2.345. $\sqrt[4]{\left(x^2+4x^{-2}\right)^2 - 8\left(x+2x^{-1}\right)^2 + 48} \cdot \left(x^2-2\right)^{-1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne \pm\sqrt{2}. \end{cases}$

$$\sqrt[4]{\left(x^2+4x^{-2}\right)^2 - 8\left(x+2x^{-1}\right)^2 + 48} \cdot \left(x^2-2\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2 - 8\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 + 48}}{x^2-2} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{\left(\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 - 4\right)^2 - 8\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 + 48}}{x^2-2} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{\left(x+\frac{2}{x}\right)^4 - 8\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 + 16 - 8\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 + 48}}{x^2-2} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{\left(x+\frac{2}{x}\right)^4 - 16\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 + 64}}{x^2-2} =$$

$$=\frac{\sqrt[4]{\left(\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-8\right)^2}}{x^2-2}=\frac{\sqrt{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-8}}{x^2-2}=\frac{\sqrt{x^2+4+\frac{4}{x^2}-8}}{x^2-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-4+\frac{4}{x^2}}}{x^2-2}=\frac{\sqrt{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}}{x^2-2}=\frac{\left|x-\frac{2}{x}\right|}{x^2-2}=\frac{\left|\frac{x^2-2}{x}\right|}{x^2-2}=\frac{\left|x^2-2\right|}{|x|\cdot\left(x^2-2\right)}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, получаем четыре случая:

1) $\begin{cases} x<-\sqrt{2}, \\ \dfrac{x^2-2}{-x\left(x^2-2\right)}=-\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -\sqrt{2}<x<0, \\ \dfrac{-\left(x^2-2\right)}{-x\left(x^2-2\right)}=\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0<x<\sqrt{2}, \\ \dfrac{-\left(x^2-2\right)}{x\left(x^2-2\right)}=-\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x>\sqrt{2}, \\ \dfrac{x^2-2}{x\left(x^2-2\right)}=\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

Ответ: $-\dfrac{1}{x}$, если $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)$;

$\dfrac{1}{x}$, если $x\in\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(\sqrt{2};\infty\right)$.

2.346. $\left(\dfrac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{\frac{1}{2}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

$$\left(\frac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{x^2+x-2\sqrt{x}+6-x-2\sqrt{x}-3}{x+2\sqrt{x}+3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2-4\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+3}}=\sqrt{\frac{\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\left(x+2\sqrt{x}+3\right)}{x+2\sqrt{x}+3}}=\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x}-1\right|=\begin{cases}-\left(\sqrt{x}-1\right)=1-\sqrt{x}, \text{ если } 0\le x<1;\\ \sqrt{x}-1, \text{ если } x\ge 1.\end{cases}$$

Ответ: $1-\sqrt{x}$, если $x\in[0;1)$; $\sqrt{x}-1$, если $x\in[1;\infty)$.

2.347. $\sqrt{x\left(x^{-1}+4x-4\right)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|}$; $x>0$.

Решение.

ОДЗ: $x\ne\dfrac{1}{2}$.

$$\sqrt{x\left(x^{-1}+4x-4\right)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=\sqrt{x\left(\frac{1}{x}+4x-4\right)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=$$

$$=\sqrt{x\cdot\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=\sqrt{x\cdot\frac{x}{(2x-1)^2}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{(2x-1)^2}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=\frac{x}{|2x-1|}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=\frac{x-2x^2}{|2x-1|}=\frac{-x(2x-1)}{|2x-1|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-x(2x-1)}{-(2x-1)}=x, \text{ если } 0<x<\dfrac{1}{2};\\[2mm] \dfrac{-x(2x-1)}{2x-1}=-x, \text{ если } x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: x, если $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; $-x$, если $x\in\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

2.348. $\left|\dfrac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot\left(x^2-4\right)$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 2$.

$$\left|\frac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot\left(x^2-4\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<2,\\ \left|\dfrac{-x+2+4}{x-2}\right|\cdot\left(x^2-4\right)=\left|\dfrac{-x+6}{x-2}\right|\cdot\left(x^2-4\right)=\dfrac{x-6}{x-2}\cdot(x-2)(x+2)=\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =x^2-4x-12;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>2,\\ \left|\dfrac{x-2+4}{x-2}\right|\cdot\left(x^2-4\right)=\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|\cdot\left(x^2-4\right)=\dfrac{x+2}{x-2}\cdot(x-2)(x+2)=(x+2)^2.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: $x^2-4x-12$ при $-\infty<x<2$; $(x+2)^2$ при $2<x<\infty$.

2.349. $\left(\dfrac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Решение.

$$\left(\frac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{\left(x^4+x^2\sqrt{2}+2\right)\left(x^4-x^2\sqrt{2}+1\right)}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(x^4+x^2\sqrt{2}+2+x^2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^4+2\sqrt{2}x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left(x^2+\sqrt{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=x^2+\sqrt{2}.$$

Ответ: $x^2+\sqrt{2}$.

2.350. $\dfrac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\left(9x^{-1}+4x-12\right)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

$$\frac{|2x-3|+6}{2x-3} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \left(9x^{-1}+4x-12\right)} = \frac{|2x-3|+6}{2x-3} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{9}{x}+4x-12\right)} =$$

$$= \frac{|2x-3|+6}{2x-3} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4x^2-12x+9}{x}} = \frac{|2x-3|+6}{2x-3} \cdot \sqrt{\frac{(2x-3)^2}{x^2}} =$$

$$= \frac{|2x-3|+6}{2x-3} \cdot \frac{|2x-3|}{|x|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем три случая:

1) $\begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{-2x+3+6}{2x-3} \cdot \dfrac{-(2x-3)}{-x} = \dfrac{9-2x}{x}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{-2x+3+6}{2x-3} \cdot \dfrac{-(2x-3)}{x} = \dfrac{2x-9}{x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2x-3+6}{2x-3} \cdot \dfrac{2x-3}{x} = \dfrac{2x+3}{x}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{9-2x}{x}$ при $-\infty < x < 0$; $\dfrac{2x-9}{x}$ при $0 < x < \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{2x+3}{x}$ при $\dfrac{3}{2} < x < \infty$.

2.351. $\dfrac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2.$

Решение.

$$\frac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2=\frac{(x^4-2x^2+2)(x^4+2x^2+3)}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2=$$
$$=x^4-2x^2+2+2x^2-2=x^4.$$

Ответ: x^4.

2.352. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{\frac{1}{2}}-(x-3)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 3$.

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{\frac{1}{2}}-(x-3)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x+3-2\sqrt{x+3}+1}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)-\left(\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{(x-3)(x+3)}\right)}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=$$
$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x+3}-1\right)^2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)-\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)\left(1-\sqrt{x+3}\right)}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)\left(1-\sqrt{x+3}\right)}{\left(\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)\right)\left(1-\sqrt{x+3}\right)}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+3}-1\right)}{-\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}-1\right)}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)}{-(x-x+3)\left(\sqrt{x+3}-1\right)}=-\frac{2\sqrt{x}}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{2\sqrt{x}}{3}$.

2.353. $\left(3a+\sqrt{6a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(3a-\sqrt{6a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\frac{1}{6}\le a\ne\frac{1}{3}$.

$$\left(3a+\sqrt{6a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(3a-\sqrt{6a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}+\frac{1}{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{\left(3a+\sqrt{6a-1}\right)\left(3a-\sqrt{6a-1}\right)}}=\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{(3a)^2-\left(\sqrt{6a-1}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{9a^2-6a+1}}=\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{(3a-1)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{|3a-1|}.$$

Используя формулы $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$,

имеем

$$\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{|3a-1|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{3a+\sqrt{9a^2-6a+1}}{2}}+\sqrt{\frac{3a-\sqrt{9a^2-6a+1}}{2}}+\sqrt{\frac{3a+\sqrt{9a^2-6a+1}}{2}}}{|3a-1|}-$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{3a-\sqrt{9a^2-6a+1}}{2}}}{|3a-1|}=\frac{2\sqrt{\frac{3a+\sqrt{9a^2-6a+1}}{2}}}{|3a-1|}=\frac{2\sqrt{\frac{3a+\sqrt{(3a-1)^2}}{2}}}{|3a-1|}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{3a+|3a-1|}{2}}}{|3a-1|}=\frac{\sqrt{6a+2|3a-1|}}{|3a-1|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6a-2(3a-1)}}{-(3a-1)}=\dfrac{\sqrt{6a-6a+2}}{1-3a}=\dfrac{\sqrt{2}}{1-3a}\text{ при }\dfrac{1}{6}\le a<\dfrac{1}{3};\\ \dfrac{\sqrt{6a+2(3a-1)}}{3a-1}=\dfrac{\sqrt{6a+6a-2}}{3a-1}=\dfrac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}\text{ при }a>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{1-3a}$ при $\dfrac{1}{6}\le a<\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$ при $\dfrac{1}{3}<a<\infty$.

2.354. $$\frac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le p<\dfrac{1}{2},\\ p\ne 0.\end{cases}$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{(1-2p)(1+2p)}-\sqrt{(1-2p)^2}}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{\sqrt{(1-2p)^2}}{\sqrt{1-2p}\left(\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}\right)}}{\left(\sqrt{\dfrac{1-4p^2}{4p^2}}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{\sqrt{1-2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}}{\left(\dfrac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{1+2p}+\sqrt{1-2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}}{\left(\dfrac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}=\frac{\sqrt{1+2p}+\sqrt{1-2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\frac{1}{2p}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+2p}+\sqrt{1-2p}\right)\left(\sqrt{1+2p}+\sqrt{1-2p}\right)}{\left(\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}\right)\left(\sqrt{1+2p}+\sqrt{1-2p}\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\frac{1}{2p}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+2p}+\sqrt{1-2p}\right)^2}{\left(\sqrt{1+2p}\right)^2-\left(\sqrt{1-2p}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\frac{1}{2p}\right)=$$

$$=\frac{1+2p+2\sqrt{(1+2p)(1-2p)}+1-2p}{1+2p-1+2p}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\frac{1}{2p}\right)=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-4p^2}}{4p}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\frac{1}{2p}\right)=\frac{1+\sqrt{1-4p^2}}{2p}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-4p^2}}{2|p|}-\frac{1}{2p}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{1-4p^2}}{2p}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{1-4p^2}}{-2p}-\dfrac{1}{2p}\right)=-\dfrac{1+\sqrt{1-4p^2}}{2p}\cdot\dfrac{\sqrt{1-4p^2}+1}{2p}= \\ \qquad\qquad =-\dfrac{\left(\sqrt{1-4p^2}+1\right)^2}{4p^2},\text{ при } -\dfrac{1}{2}\le p<0; \\ \dfrac{1+\sqrt{1-4p^2}}{2p}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{1-4p^2}}{2p}-\dfrac{1}{2p}\right)=\dfrac{\sqrt{1-4p^2}+1}{2p}\cdot\dfrac{\sqrt{1-4p^2}-1}{2p}= \\ \qquad\qquad =\dfrac{1-4p^2-1}{4p^2}=-1,\text{ при } -0<p<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{(\sqrt{1-4p^2}+1)^2}{4p^2}$ при $-\dfrac{1}{2} \le p < 0$; -1 при $0 < p < \dfrac{1}{2}$.

2.355. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}$.

Решение.

ОДЗ: $a \ge 0,\ b \ge 0,\ a+b \ne 0.$

$$\sqrt{\frac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^4}-8\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^2}+4\sqrt[6]{b^4}}{\sqrt[4]{a^2}-2\sqrt[6]{b^2}+2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}}+3\sqrt[6]{b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^4}-8\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^2}+4\sqrt[6]{b^4}+3\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^2}-6\sqrt[6]{b^4}+6\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}-2\sqrt[6]{b^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^4}-5\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^2}+6\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b^3}-2\sqrt[6]{b^4}}{\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}-2\sqrt[6]{b^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt[4]{a^2}-2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{b^2})(\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}-2\sqrt[6]{b^2})}{\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}-2\sqrt[6]{b^2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[4]{a^2}-2\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{b^2}} = \sqrt{(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[6]{b})^2} = \left|\sqrt[4]{a}-\sqrt[6]{b}\right|.$$

Ответ: $\left|\sqrt[4]{a}-\sqrt[6]{b}\right|$, $a \ge 0,\ b \ge 0,\ a+b \ne 0.$

2.356. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 4$.

$$\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}}{\sqrt{\frac{x^2-8x+16}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}}{\sqrt{\frac{(x-4)^2}{x^2}}}=\frac{\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|}{\frac{|x-4|}{x}}=$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\right)}{|x-4|}.$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, имеем два случая:

1) $\begin{cases} 4<x<8, \\ \dfrac{x\left(\sqrt{x-4}+2-\sqrt{x-4}+2\right)}{x-4}=\dfrac{4x}{x-4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\geq 8, \\ \dfrac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2\right)}{x-4}=\dfrac{2x\sqrt{x-4}}{\sqrt{(x-4)^2}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}. \end{cases}$

Ответ: $\frac{4x}{x-4}$ при $4<x<8$; $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$ при $8\leq x<\infty$.

2.357. Доказать, что если для чисел x, y, z, m, n, p выполняются равенства $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$, $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них выполняется также равенство $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$.

Решение.

Возведя равенство $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$ в квадрат, получим

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1-2\cdot\frac{xyp+xzn+yzm}{mnp}.\ (*)$$

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0\Rightarrow xyp+xzn+yzm=0\ (**)$$

Подставляя (**) в (*), имеем $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$, что и требовалось доказать.

2.358. Разложить на множители $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

Решение.

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=x^2y-x^2z+y^2z-xy^2+xz^2-yz^2=$$
$$=x^2y-x^2z+y^2z-xy^2+xz^2-yz^2+xyz-xyz=\left(xyz-xy^2-x^2z+x^2y\right)-$$
$$-yz^2+y^2z+xz^2-xyz=\left(yz-y^2-xz+xy\right)x-\left(yz^2-y^2z-xz^2+xyz\right)=$$
$$=\left(yz-y^2-xz+xy\right)x-\left(yz-y^2-xz+xy\right)z=\left(yz-y^2-xz+xy\right)(x-z)=$$
$$=(y(z-y)-x(z-y))(x-y)=(z-y)(y-x)(x-z)=(y-x)(z-y)(x-z).$$

Ответ: $(y-x)(z-y)(x-z)$.

2.359. Разложить на множители $x\left(y^2-z^2\right)+y\left(z^2-x^2\right)+z\left(x^2-y^2\right)$.

Решение.

$$x\left(y^2-z^2\right)+y\left(z^2-x^2\right)+z\left(x^2-y^2\right)=xy^2-xz^2+yz^2-x^2y+x^2z-y^2z=$$
$$=xy^2-xz^2+yz^2-x^2y+x^2z-y^2z+xyz-xyz=xyz-x^2y-y^2z+xy^2-$$
$$-xz^2+x^2z+yz^2-xyz=y\left(xz-x^2-yz+xy\right)-z\left(xz-x^2-yz+xy\right)=$$
$$=\left(xz-x^2-yz+xy\right)(y-z)=(x(z-x)-y(z-x))(y-z)=$$
$$=(z-x)(x-y)(y-z)=(x-y)(z-x)(y-z).$$

Ответ: $(x-y)(z-x)(y-z)$.

2.360. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b $(a>b)$ в m раз больше их среднего геометрического. Доказать, что

$$\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}.$$

Решение.
Из условия

$$\frac{a+b}{2}=m\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=2m,\quad \frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ab}}=2m,\quad \sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2m=0,$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}-2m=0,\quad \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-2m\sqrt{\frac{a}{b}}+1=0.$$

Решив полученное уравнение как квадратное относительно $\sqrt{\frac{a}{b}}$, найдем $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-1}$. Из полученных двух значений $\sqrt{\frac{a}{b}}=m-\sqrt{m^2-1}$ не соответствует условию, так как $a>b$, $\frac{a}{b}>1$, $\sqrt{\frac{a}{b}}>\sqrt{1}=1$.

Следовательно,

$$m-\sqrt{m^2-1}>1,\quad m-1-\sqrt{m^2-1}>0,\quad \sqrt{(m-1)^2}-\sqrt{(m-1)(m+1)}>0,$$

$$\sqrt{m-1}\left(\sqrt{m-1}-\sqrt{m+1}\right)>0.\ \text{Но}\ \sqrt{m-1}>0,\ \text{а}\ \sqrt{m-1}-\sqrt{m+1}<0.$$

Получили противоречие.
Таким образом,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=m+\sqrt{m^2-1},\quad \frac{a}{b}=\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2}{\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}},$$

что и требовалось доказать.

Решения к главе 3

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{3.1}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.2}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{3.3}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z; \tag{3.4}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.5}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z \tag{3.6}$$

(здесь и в дальнейшем запись $n \in Z$ означает, что n — любое целое число).

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Аргумент (α, градусы, радианы)	**Функция**			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0^\circ\ (0)$	0	1	0	∞ (не определен)
$15^\circ \left(\dfrac{\pi}{12}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ \left(\dfrac{\pi}{10}\right)$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ \left(\dfrac{\pi}{6}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ \left(\dfrac{\pi}{5}\right)$	$\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ \left(\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ \left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$75^\circ \left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ \left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Знаки функций по четвертям

Таблица 3.2

Четверти	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,; \qquad (3.7)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,; \qquad (3.8)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,; \qquad (3.9)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,; \qquad (3.10)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \qquad (3.11)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \qquad (3.12)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,; \qquad (3.13)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,. \qquad (3.14)$$

Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,; \qquad (3.15)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\,; \qquad (3.16)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},k\in Z,\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z\,; \tag{3.17}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi k}{2},k\in Z,\alpha\neq\pi n,n\in Z\,; \tag{3.18}$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\,; \tag{3.19}$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\,; \tag{3.20}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1),n\in Z\,; \tag{3.21}$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{3},n\in Z\,. \tag{3.22}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,; \tag{3.23}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\,; \tag{3.24}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),n\in Z\,; \tag{3.25}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq2\pi n,n\in Z\,; \tag{3.26}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,n\in Z\,; \tag{3.27}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,n\in Z\,. \tag{3.28}$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.29)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.30)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.31)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}; \qquad (3.32)$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha); \qquad (3.33)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha); \qquad (3.34)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z; \qquad (3.35)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z; \qquad (3.36)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (3.37)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (3.38)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z; \qquad (3.39)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z; \qquad (3.40)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z; \qquad (3.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z; \qquad (3.42)$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3.43)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3.44)$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (3.45)$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (3.46)$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.47)$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.48)$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.49)$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.50)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.51)$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.52)$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.53)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.54)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.55)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z; \qquad (3.56)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z. \qquad (3.57)$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right); \tag{3.58}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right); \tag{3.59}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right); \tag{3.60}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{3.61}$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{3.62}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{3.63}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right). \tag{3.64}$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.65}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.66}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha,\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{3.67}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \tag{3.68}$$

Формулы приведения

$$\left.\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\end{array}\right\} \tag{3.69}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\\ \cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\end{array}\right\} \tag{3.70}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ \operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ \operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z;\end{array}\right\} \tag{3.71}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ \operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z.\end{array}\right\} \tag{3.72}$$

Обратные тригонометрические функции

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.73}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.74}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.75}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.76}$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.77}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.78}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.79}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.80}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \tag{3.81}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0; \tag{3.82}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \tag{3.83}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x < 0, \ 0 < x \le 1; \tag{3.84}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \tag{3.85}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0; \tag{3.86}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 0, \ 0 < x \le 1; \tag{3.87}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \tag{3.88}$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1 \le x < 0; \end{cases} \tag{3.89}$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1; \tag{3.90}$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, \text{ если } -1 \le x < 0; \end{cases} \tag{3.91}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1 \le x < 0; \end{cases} \tag{3.92}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } -1 \le x < 0; \end{cases} \tag{3.93}$$

$$\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1; \tag{3.94}$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < \infty; \tag{3.95}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ \text{ если } x \ge 0, \\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.96}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} - \pi, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.97}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x > 0, \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.98}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x \geq 0, \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.99}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.100}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{3.101}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty; \tag{3.102}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \tag{3.103}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x > 0,\ y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x < 0,\ y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \tag{3.104}$$

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x + y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x + y < 0; \end{cases} \tag{3.105}$$

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x \geq y; \\ \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x < y; \end{cases} \tag{3.106}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x > 0 \text{ и } xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x < 0 \text{ и } xy > 1; \end{cases} \tag{3.107}$$

$$\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{ если } xy>-1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{ если } x>0 \text{ и } xy<-1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{ если } x<0 \text{ и } xy<-1;\end{cases} \qquad (3.108)$$

Доказать тождества (**3.396—3.409**):

3.396. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$

Решение.

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 2(2\alpha)}{3+4\cos 2\alpha+\cos 2(2\alpha)}=$$

$$=\frac{3-4(2\cos^2\alpha-1)+2\cos^2 2\alpha-1}{3+4(2\cos^2\alpha-1)+2\cos^2 2\alpha-1}=$$

$$=\frac{3-8\cos^2\alpha+4+2(\cos 2\alpha)^2-1}{3+8\cos^2\alpha-4+2(\cos 2\alpha)^2-1}=\frac{6-8\cos^2\alpha+2(2\cos^2\alpha-1)^2}{-2+8\cos^2\alpha+2(2\cos^2\alpha-1)^2}=$$

$$=\frac{6-8\cos^2\alpha+2(4\cos^4\alpha-4\cos^2\alpha+1)}{-2+8\cos^2\alpha+2(4\cos^4\alpha-4\cos^2\alpha+1)}=$$

$$=\frac{6-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+2}{-2+8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+2}=$$

$$=\frac{8\cos^4\alpha-16\cos^2\alpha+8}{8\cos^4\alpha}=\frac{8(\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1)}{8\cos^4\alpha}=\frac{(\cos^2\alpha-1)^2}{\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{(1-\cos^2\alpha)^2}{\cos^4\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha)^2}{\cos^4\alpha}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

3.397. $\operatorname{ctg}(270^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150^\circ-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha.$

Решение.

$$\operatorname{ctg}(270^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210^\circ-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150^\circ-2\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha+\frac{\sin(360^\circ-4\alpha)}{\sin(210^\circ-2\alpha)\sin(150^\circ-2\alpha)}=$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{\sin(210^\circ-2\alpha)\sin(150^\circ-2\alpha)}=$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos(360^\circ-4\alpha))}=\operatorname{tg}2\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos 4\alpha\right)}=$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha-\frac{4\sin 4\alpha}{1-2\cos 4\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{4\sin 2(2\alpha)}{1-2\cos 2(2\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{8\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{1-2(2\cos^2 2\alpha-1)}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{8\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{4\cos^2 2\alpha-3}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha(4\cos^2 2\alpha-3+8\cos^2 2\alpha)}{4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha(12\cos^2 2\alpha-3)}{4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{3\sin 2\alpha(4(1-\sin^2 2\alpha)-1)}{4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha}=\frac{3\sin 2\alpha(3-4\sin^2 2\alpha)}{4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{3(3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha)}{4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha}=[3\sin x-4\sin^3 x=$$

$$=\sin 3x, 4\cos^3 x-3\cos x=\cos 3x]=\frac{3\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}=3\operatorname{tg}6\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

3.398. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos 2\alpha}+2\cos(2\pi-4\alpha)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}\cdot\cos 2\alpha}+$$

$$+2\cos 4\alpha=\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)(1+\sin 2\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\cos 2\alpha}+2\cos 4\alpha=$$

$$=\frac{(1-\sin 2\alpha)(1+\sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha\cos 2\alpha}+2\cos 2(2\alpha)=\frac{1-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+2\cos 2(2\alpha)=$$

$$=\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+2\cos 2(2\alpha)=1+2\cos 2(2\alpha)=1+2\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)=$$

$$=3-4\sin^2 2\alpha=\frac{\left(3-4\sin^2 2\alpha\right)\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.399. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$

Решение.

$$8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=$$
$$=-8\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)-\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1=$$
$$=-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1=-2\sin^2 2\alpha-\cos 3\alpha+1=$$
$$=\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)-\cos 3\alpha=\cos 4\alpha-\cos 3\alpha=-2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.400. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$

Решение.

$$\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$
$$=(\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$$
$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=(\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha)+$$
$$+(\cos\beta+\cos\gamma)=2\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=$$
$$=2\left(\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.401. $\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos^3 4\alpha.$

Решение.

$$\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)(\sin(\pi-2\alpha))^3-\cos(\pi-6\alpha)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)^3=$$
$$=\left[\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x, \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\right]=$$
$$=\sin 6\alpha\sin^3 2\alpha+\cos 6\alpha\cos^3 2\alpha=\sin 3(2\alpha)\sin^3 2\alpha+\cos 3(2\alpha)\cos^3 2\alpha=$$
$$=\left(3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha\right)\sin^3 2\alpha+\left(4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha\right)\cos^3 2\alpha=$$
$$=3\sin^4 2\alpha-4\sin^6 2\alpha+4\cos^6 2\alpha-3\cos^4 2\alpha=$$
$$=-3\left(\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha\right)+4\left(\cos^6 2\alpha-\sin^6 2\alpha\right)=$$
$$=-3\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)+$$
$$+4\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)\left(\cos^4 2\alpha+\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha\right)=$$
$$=-3\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)+4\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)\times$$
$$\times\left(\left(\cos^4 2\alpha+\sin^4 2\alpha\right)+\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha\right)=-3\cos 4\alpha+$$
$$+4\cos 4\alpha\left(\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)^2-2\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha\right)=$$
$$=-3\cos 4\alpha+4\cos 4\alpha\left(1-\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha\right)=$$
$$=-3\cos 4\alpha+4\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=$$
$$=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\left(4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha\right)=\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\sin^2 4\alpha=$$
$$=\cos 4\alpha\left(1-\sin^2 4\alpha\right)=\cos 4\alpha\cos^2 4\alpha=\cos^3 4\alpha.$$

Тождество доказано.

3.402. $8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$

Решение.

$$8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=$$
$$=\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha\right)+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1=$$

$$=-8\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1=$$
$$=-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1=$$
$$=\left[4\cos^3 x-3\cos x=\cos 3x\right]=-2\sin^2 2\alpha+\cos 3\alpha+1=$$
$$=\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)+\cos 3\alpha=\cos 4\alpha+\cos 3\alpha=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.403. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

Решение.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}-(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=1-\cos^2(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta).$$

Тождество доказано.

3.404. $\dfrac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=-\operatorname{tg}\dfrac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Решение.

$$\frac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=$$
$$=\frac{\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha\right)-\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1}{\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha\right)+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1}=$$
$$=\frac{-8\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)-\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1}{-8\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1}=$$
$$=\frac{-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1}{-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+1}=$$

$$=\frac{-2\sin^2 2\alpha-\cos 3\alpha+1}{-2\sin^2 2\alpha+\cos 3\alpha+1}=\frac{(1-2\sin^2 2\alpha)-\cos 3\alpha}{(1-2\sin^2 2\alpha)+\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha-\cos 3\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 3\alpha}=\frac{-2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=-\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.405. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma+\alpha}{2}.$

Решение.

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta+\gamma))+(\sin\beta+\sin\gamma)}{(\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta+\gamma))+(\cos\beta+\cos\gamma)}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}+2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.406. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha,$
n — любое натуральное число или 0.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha}-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-2\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=2\operatorname{ctg}2\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=2(\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha)-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=2\left(\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}\right)-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{2\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{\sin2\alpha\cos2\alpha}-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{4\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{2\sin2\alpha\cos2\alpha}-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=\frac{4\cos4\alpha}{\sin4\alpha}-4\operatorname{tg}4\alpha-8\operatorname{tg}8\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=4\operatorname{ctg}4\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-8\operatorname{tg}8\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=$$

$$=4(\operatorname{ctg}4\alpha-\operatorname{tg}4\alpha)-8\operatorname{tg}8\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

3.407. $\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}$,
n — число слагаемых.
Пусть

$$S_n=\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2\sin\alpha S_n=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha\cos3\alpha+2\sin\alpha\cos5\alpha+\ldots$$

$$\ldots+2\sin\alpha\cos(2n-1)\alpha=\sin2\alpha-\sin2\alpha+\sin4\alpha-\sin4\alpha+\sin6\alpha-\ldots-$$

$$-\sin(2n-2)\alpha+\sin2n\alpha,\ 2\sin\alpha S_n=\sin2n\alpha\Rightarrow S_n=\frac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.408. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\dfrac{n}{2}$,

n — число слагаемых.

Решение.

Пусть

$$S_n=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=$$
$$=\frac{1+\cos\alpha}{2}+\frac{1+\cos 4\alpha}{2}+\frac{1+\cos 6\alpha}{2}+\ldots+\frac{1+\cos 2n\alpha}{2}=$$
$$=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n\text{ слагаемых}}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\ldots+\frac{1}{2}\cos 2n\alpha=$$
$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_n-\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(S_n-\frac{n}{2}\right)=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\sin\alpha\left(S_n-\frac{n}{2}\right)=2\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos 4\alpha+2\sin\alpha\cos 6\alpha+\ldots+$$
$$+2\sin\alpha\cos 2n\alpha=-\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha-\sin 5\alpha+$$
$$+\sin 7\alpha-\ldots-\sin(2n-1)\alpha+\sin(2n+1)\alpha=-\sin\alpha+\sin(2n+1)\alpha;$$
$$4\sin\alpha\left(S_n-\frac{n}{2}\right)=\sin(2n+1)\alpha-\sin\alpha=2\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n-\frac{n}{2}=\frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}\text{ и }S_n=\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{n}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.409. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

Решение.

Пусть

$$S_n=\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=$$
$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 4\alpha}{2}+\frac{1-\cos 6\alpha}{2}+\ldots+\frac{1-\cos 2n\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha-\frac{1}{2}\cos 6\alpha-\ldots-\frac{1}{2}\cos 2n\alpha=$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n-\frac{n}{2}=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha)\Rightarrow 2\sin\alpha\left(S_n-\frac{n}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos 4\alpha+2\sin\alpha\cos 6\alpha+\ldots+2\sin\alpha\cos 2n\alpha)=$$

$$=-\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha-\ldots-\sin(2n-1)\alpha+$$

$$+\sin(2n+1)\alpha)=-\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sin(2n+1)\alpha)=-\frac{1}{2}(\sin(2n+1)\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=-\frac{1}{2}(2\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha)=-\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha;$$

$$S_n-\frac{n}{2}=-\frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha};$$

$$S_n=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Тождество доказано.

Упростить выражения (**3.410 — 3.412**):

3.410. $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha.$

Решение.

$$\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha=\sin^3 2\alpha\cos 3(2\alpha)+\cos^3 2\alpha\sin 3(2\alpha)=$$

$$=\sin^3 2\alpha(4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha)+\cos^3 2\alpha(3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha)=$$

$$=4\sin^3 2\alpha\cos^3 2\alpha-3\sin^3 2\alpha\cos 2\alpha+3\cos^3 2\alpha\sin 2\alpha-4\cos^3 2\alpha\sin^3 2\alpha=$$

$$=-3\sin^3 2\alpha\cos 2\alpha+3\cos^3 2\alpha\sin 2\alpha=3\sin 2\alpha\cos 2\alpha(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)=$$

$$=\frac{3}{2}(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)=\frac{3}{2}\sin 4\alpha\cos 4\alpha=$$

$$=\frac{3}{4}(2\sin 4\alpha\cos 4\alpha)=\frac{3}{4}\sin 8\alpha.$$

Ответ: $\frac{3}{4}\sin 8\alpha.$

3.411. $3\sin\alpha\cos 3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha\cos 3\alpha-3\sin 3\alpha\cos\alpha.$

Решение.

$$3\sin\alpha\cos3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-\sin3\alpha\cos3\alpha-3\sin3\alpha\cos\alpha=$$

$$=(3\sin\alpha\cos3\alpha-3\sin3\alpha\cos\alpha)+\frac{9}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)-\frac{1}{2}(2\sin3\alpha\cos3\alpha)=$$

$$=3(\sin\alpha\cos3\alpha-\cos\alpha\sin3\alpha)+\frac{9}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)-\frac{1}{2}(2\sin3\alpha\cos3\alpha)=$$

$$=-3\sin2\alpha+\frac{9}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\sin6\alpha=\frac{3}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\sin3(2\alpha)=$$

$$=\frac{3}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}(3\sin2\alpha-4\sin^3 2\alpha)=\frac{3}{2}\sin2\alpha-\frac{3}{2}\sin2\alpha+2\sin^3 2\alpha=$$

$$=2\sin^3 2\alpha.$$

Ответ: $2\sin^3 2\alpha$.

3.412. $4(\sin^4 x+\cos^4 x)-4(\sin^6 x+\cos^6 x)-1$.

Решение.

$$4(\sin^4 x+\cos^4 x)-4(\sin^6 x+\cos^6 x)-1=$$

$$=4\left((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right)-4(\sin^2 x+\cos^2 x)\times$$

$$\times(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-1=4(1-2\sin^2 x\cos^2 x)-$$

$$-4((\sin^4 x+\cos^4 x)-\sin^2 x\cos^2 x)-1=4-2(4\sin^2 x\cos^2 x)-$$

$$-4\left((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x\right)-1=$$

$$=4-2(4\sin^2 x\cos^2 x)-4(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-1=$$

$$=4-2(4\sin^2 x\cos^2 x)-4\left(1-\frac{3}{4}(4\sin^2 x\cos^2 x)\right)-1=$$

$$=4-2\sin^2 2x-4\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-1=4-2\sin^2 2x-4+3\sin^2 2x-1=$$

$$=\sin^2 2x-1=-(1-\sin^2 2x)=-\cos^2 2x.$$

Ответ: $-\cos^2 2x$.

Преобразовать в произведение (**3.413 — 3.415**):

3.413. $\sin^3\alpha\cos3\alpha+\cos^3\alpha\sin3\alpha$.

Решение.

$$\sin^3\alpha\cos3\alpha+\cos^3\alpha\sin3\alpha=$$
$$=\sin^3\alpha\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)+\cos^3\alpha\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=$$
$$=4\sin^3\alpha\cos^3\alpha-3\sin^3\alpha\cos\alpha+3\cos^3\alpha\sin\alpha-4\sin^3\alpha\cos^3\alpha=$$
$$=-3\sin^3\alpha\cos\alpha+3\cos^3\alpha\sin\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=$$
$$=\frac{3}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\frac{3}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha=$$
$$=\frac{3}{4}(2\sin2\alpha\cos2\alpha)=\frac{3}{4}\sin4\alpha.$$

Ответ: $\frac{3}{4}\sin4\alpha.$

3.414. $\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos2\alpha}{\cos^{-2}\alpha-1}+\frac{1+\cos2\alpha}{\sin^{-2}\alpha-1}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+\sin2\alpha.$

Решение.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos2\alpha}{\cos^{-2}\alpha-1}+\frac{1+\cos2\alpha}{\sin^{-2}\alpha-1}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+\sin2\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\frac{1+\cos2\alpha}{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+\sin2\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(1-\cos2\alpha)\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{(1+\cos2\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+\sin2\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1-\left(2\cos^2\alpha-1\right)\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{\left(1+1-2\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+$$
$$+\sin2\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(2-2\cos^2\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{2\left(1-\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+$$
$$+\sin2\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{2\left(1-\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+$$
$$+\sin2\alpha=\frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+\sin2\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$$

$$=1+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=1+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+1\right)=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(1+\sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\left[\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)^2}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$.

3.415. $\cos 22\alpha+3\cos 18\alpha+3\cos 14\alpha+\cos 10\alpha$.

Решение.

$\cos 22\alpha+3\cos 18\alpha+3\cos 14\alpha+\cos 10\alpha=$

$=(\cos 22\alpha+\cos 10\alpha)+(3\cos 18\alpha+3\cos 14\alpha)=$

$= (\cos 22\alpha + \cos 10\alpha) + 3(\cos 18\alpha + \cos 14\alpha) =$

$= 2\cos 16\alpha \cos 6\alpha + 6\cos 16\alpha \cos 2\alpha =$

$= 2\cos 16\alpha(\cos 6\alpha + 3\cos 2\alpha) = 2\cos 16\alpha(\cos 3(2\alpha) + 3\cos 2\alpha) =$

$= 2\cos 16\alpha\left(4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha + 3\cos 2\alpha\right) =$

$= 2\cos 16\alpha \cdot 4\cos^3 2\alpha = 8\cos 16\alpha \cos^3 2\alpha.$

Ответ: $8\cos 16\alpha \cos^3 2\alpha$.

Доказать справедливость равенств (**3.416 — 3.440**):

Замечание. При доказательстве справедливости равенств, содержащих обратные тригонометрические функции, используется, что сумма двух обратных тригонометрических функций, вычисленных от положительных величин, заключена в промежутке $[0; \pi]$, а разность — в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.416. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}$.

Решение.

Если $X = \cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}$, то умножая обе части этого равенства на $2\sin\frac{\pi}{33}$, имеем

$2X\sin\frac{\pi}{33} = \left(2\sin\frac{\pi}{33}\cos\frac{\pi}{33}\right)\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33} =$

$= \sin\frac{2\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$.

$4X\sin\frac{\pi}{33} = \left(2\sin\frac{2\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\right)\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33} =$

$= \sin\frac{4\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

$8X\sin\frac{\pi}{33} = \left(2\sin\frac{4\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\right)\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33} = \sin\frac{8\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

$16X\sin\frac{\pi}{33} = \left(2\sin\frac{8\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\right)\cos\frac{16\pi}{33} = \sin\frac{16\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

$$32X\sin\frac{\pi}{33}=2\sin\frac{16\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\sin\frac{32\pi}{33}.$$

Таким образом

$$X=\frac{\sin\frac{32\pi}{33}}{32\sin\frac{\pi}{33}}=\frac{\sin\frac{33\pi-\pi}{33}}{32\sin\frac{\pi}{33}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{33}\right)}{32\sin\frac{\pi}{33}}=\frac{\sin\frac{\pi}{33}}{32\sin\frac{\pi}{33}}=\frac{1}{32}.$$

Что и требовалось доказать.

3.417. $3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{6\pi}{17}-\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17}=8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}.$

Решение.

$$3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{6\pi}{17}-\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17}=3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-$$
$$-\sin3\left(\frac{2\pi}{17}\right)-\frac{1}{2}\sin2\left(\frac{4\pi}{17}\right)=3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\left(3\sin\frac{2\pi}{17}-4\sin^3\frac{2\pi}{17}\right)-$$
$$-\sin\frac{4\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}=\left(\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{4\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\right)+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=$$
$$=\sin\frac{4\pi}{17}\left(1-\cos2\left(\frac{2\pi}{17}\right)\right)+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=\sin\frac{4\pi}{17}\left(1-1+2\sin^2\frac{2\pi}{17}\right)+$$
$$+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=\sin\frac{4\pi}{17}\cdot2\sin^2\frac{2\pi}{17}+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=2\sin2\left(\frac{2\pi}{17}\right)\sin^2\frac{2\pi}{17}+$$
$$+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=4\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\sin^2\frac{2\pi}{17}+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=$$
$$=4\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}+4\sin^3\frac{2\pi}{17}=4\sin^3\frac{2\pi}{17}\left(\cos\frac{2\pi}{17}+1\right)=$$
$$=4\sin^3\frac{2\pi}{17}\left(2\cos^2\frac{\pi}{17}-1+1\right)=8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}.$$

Что и требовалось доказать.

3.418. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}.$

Решение.

Если $X=\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}$, то умножая обе части этого равенства на $2\sin\frac{\pi}{31}$, имеем

$$2X\sin\frac{2\pi}{31}=\left(2\sin\frac{2\pi}{31}\cos\frac{2\pi}{31}\right)\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}.$$

$$2X\sin\frac{2\pi}{31}=\sin\frac{4\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31},$$

$$4X\sin\frac{2\pi}{31}\left(2\sin\frac{4\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\right)\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=$$

$$=\sin\frac{8\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31},$$

$$8X\sin\frac{2\pi}{31}=\left(2\sin\frac{8\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\right)\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\sin\frac{16\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31},$$

$$16X\sin\frac{2\pi}{31}=\left(2\sin\frac{16\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\right)\cos\frac{32\pi}{31}=\sin\frac{32\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31},$$

$$32X\sin\frac{2\pi}{31}=2\sin\frac{32\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\sin\frac{64\pi}{31},$$

откуда

$$X=\frac{\sin\frac{64\pi}{31}}{32\sin\frac{2\pi}{31}}=\frac{\sin\frac{62\pi+2\pi}{31}}{32\sin\frac{2\pi}{31}}=\frac{\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{31}\right)}{32\sin\frac{2\pi}{31}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{31}}{32\sin\frac{2\pi}{31}}=\frac{1}{32}.$$

Что и требовалось доказать.

3.419. $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ=48.$

Решение.

$$\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ=$$

$$=\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}\cdot\frac{1}{\cos20^\circ}\cdot\frac{\sin40^\circ}{\cos40^\circ}\cdot\frac{1}{\cos40^\circ}\cdot\frac{\sin60^\circ}{\cos60^\circ}\cdot\frac{1}{\cos60^\circ}\cdot\frac{\sin80^\circ}{\cos80^\circ}\cdot\frac{1}{\cos80^\circ}=$$

$$=\frac{\sin20^\circ\sin40^\circ\sin60^\circ\sin80^\circ}{(\cos20^\circ\cos40^\circ\cos60^\circ\cos80^\circ)^2}=\frac{\sin20^\circ\sin40^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin80^\circ}{\left(\cos20^\circ\cos40^\circ\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos80^\circ\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ \sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ(\sin 60^\circ \cos 20^\circ-\cos 60^\circ \sin 20^\circ)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)}\times$$

$$\times\frac{(\sin 60^\circ \cos 20^\circ+\cos 60^\circ \sin 20^\circ)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ \cos^2 20^\circ-\cos^2 60^\circ \sin^2 20^\circ)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ(1-\sin^2 20^\circ)-\sin^2 20^\circ(1-\sin^2 60^\circ))}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ-\sin^2 60^\circ \sin^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ+\sin^2 60^\circ \sin^2 20^\circ)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ-\sin^2 20^\circ)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2 20^\circ\right)}{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ(3-4\sin^2 20^\circ)}{2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{\sqrt{3}(3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ)}{2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{3}{2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{3\sin^2 20^\circ}{((2\sin 20^\circ \cos 20^\circ)\cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{3\sin^2 20^\circ}{(\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{48\sin^2 20^\circ}{(4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)^2}=$$

$$=\frac{48\sin^2 20^\circ}{2(\sin 80^\circ \cos 80^\circ)^2}=\frac{48\sin^2 20^\circ}{(\sin 160^\circ)^2}=\frac{48\sin^2 20^\circ}{(\sin(180^\circ-20^\circ))^2}=\frac{48\sin^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ}=48.$$

Что и требовалось доказать.

3.420. $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ=\frac{3}{256}.$

Решение.

$$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ =$$

$$= (\sin 10^\circ \sin 80^\circ)(\sin 20^\circ \sin 70^\circ)(\sin 30^\circ \sin 60^\circ)(\sin 40^\circ \sin 50^\circ) =$$

$$= \frac{\cos 70^\circ - \cos 90^\circ}{2} \cdot \frac{\cos 50^\circ - \cos 90^\circ}{2} \cdot \frac{\cos 30^\circ - \cos 90^\circ}{2} \cdot \frac{\cos 10^\circ - \cos 90^\circ}{2} =$$

$$= \frac{\cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 30^\circ \cos 10^\circ}{16} = \frac{\cos 70^\circ \cos 50^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 10^\circ}{16} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 70^\circ (\cos 50^\circ \cos 10^\circ)}{32} = \frac{\sqrt{3}\cos 70^\circ \cdot \frac{1}{2}(\cos 40^\circ + \cos 60^\circ)}{32} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 70^\circ \left(\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right)}{64} = \frac{\sqrt{3}\cos 70^\circ (2\cos 40^\circ + 1)}{128} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(2\cos 70^\circ \cos 40^\circ) + \sqrt{3}\cos 70^\circ}{128} = \frac{\sqrt{3}(\cos 30^\circ + \cos 110^\circ) + \sqrt{3}\cos 70^\circ}{128} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 110^\circ\right) + \sqrt{3}\cos 70^\circ}{128} = \frac{3 + 2\sqrt{3}\cos 110^\circ + 2\sqrt{3}\cos 70^\circ}{256} =$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3}(\cos 110^\circ + \cos 70^\circ)}{256} = \frac{3 + 2\sqrt{3} \cdot 2\cos 90^\circ \cos 20^\circ}{256} = \frac{3+0}{256} = \frac{3}{256}.$$

Что и требовалось доказать.

3.421. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = -\frac{1}{2^{14}}.$

Решение.

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\times$$

$$\times\cos\frac{9\pi}{15}\cos\frac{10\pi}{15}\cos\frac{11\pi}{15}\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = \left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{12\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{11\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{10\pi}{15}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{9\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{15}\right)\right)\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{15}\right)\right)\left(\cos\frac{4\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{15}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{5\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{15}\right)\right)\left(\cos\frac{6\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{6\pi}{15}\right)\right)\left(\cos\frac{7\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{15}\right)\right)=$$

$$=-\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{5\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\cos^2\frac{7\pi}{15}=$$

$$=\left[\cos^2\frac{5\pi}{15}=\left(\cos\frac{5\pi}{15}\right)^2=\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right]=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\cos^2\frac{7\pi}{15}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\cos^2\left(\pi-\frac{8\pi}{15}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\cos^2\frac{8\pi}{15}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{8\pi}{15}\right)\left(\cos^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{8\pi}{15}\right)\times$$

$$\times\left(\sin^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{3\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\right)=-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{8\pi}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{6\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}\cdot\left(\frac{1}{16}\sin^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{8\pi}{15}\right)\left(\frac{1}{16}\sin^2\frac{12\pi}{15}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}\cdot\left(\frac{1}{64}\sin^2\frac{8\pi}{15}\cos^2\frac{8\pi}{15}\right)\left(\frac{1}{16}\sin^2\frac{12\pi}{15}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}\cdot\frac{1}{256}\sin^2\frac{16\pi}{15}\cdot\frac{1}{16}\sin^2\frac{12\pi}{15}=-\frac{\sin^2\frac{16\pi}{15}\sin^2\frac{12\pi}{15}}{2^{14}\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}=$$

$$=-\frac{\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{15}\right)}{2^{14}\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}=-\frac{\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}{2^{14}\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}}=-\frac{1}{2^{14}}.$$

Что и требовалось доказать.

3.422. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}.$

Решение.

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)\cos\frac{5\pi}{15}=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{15}\right)\right)\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)=$$

$$=\frac{-\left(\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right)\left(\sin\frac{3\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)}{2\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=$$

$$=\frac{-\left(\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right)\left(\sin\frac{6\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)}{8\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=$$

$$=\frac{-\left(\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right)\sin\frac{12\pi}{15}}{32\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=\frac{-\left(\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right)\sin\frac{12\pi}{15}}{64\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=$$

$$=\frac{-\sin\frac{16\pi}{15}\sin\frac{12\pi}{15}}{128\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=\frac{-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{15}\right)}{128\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=\frac{\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}{128\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}=$$

$$=\frac{1}{128}=\frac{1}{2^7}.$$

Что и требовалось доказать.

3.423. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=0{,}5\sin 25^\circ\sin^{-1}5^\circ$.

Решение.

$$\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=(\sin 10^\circ+\sin 50^\circ)+$$
$$+(\sin 20^\circ+\sin 40^\circ)+\sin 30^\circ=2\sin 30^\circ\cos 20^\circ+2\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\sin 30^\circ=$$
$$=2\sin 30^\circ(\cos 20^\circ+\cos 10^\circ)+\sin 30^\circ=2\sin 30^\circ\cdot 2\cos 15^\circ\cos 5^\circ+\sin 30^\circ=$$
$$=\sin 30^\circ(4\cos 15^\circ\cos 5^\circ+1)=\frac{\sin 30^\circ(4\cos 15^\circ\cos 5^\circ+1)\sin 5^\circ}{\sin 5^\circ}=$$
$$\frac{\sin 30^\circ(2\cos 15^\circ(2\sin 5^\circ\cos 5^\circ)+\sin 5^\circ)}{\sin 5^\circ}=\frac{\sin 30^\circ(2\cos 15^\circ\sin 10^\circ+\sin 5^\circ)}{\sin 5^\circ}=$$
$$=\frac{\sin 30^\circ(-\sin 5^\circ+\sin 25^\circ+\sin 5^\circ)}{\sin 5^\circ}=\frac{\sin 30^\circ\sin 25^\circ}{\sin 5^\circ}=\frac{0{,}5\sin 25^\circ}{\sin 5^\circ}=$$
$$=0{,}5\sin 25^\circ\sin^{-1}5^\circ.$$

Что и требовалось доказать.

3.424. $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}80^\circ=1$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}80^\circ=$$
$$=\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ(\operatorname{ctg}80^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ)=$$
$$=\frac{\cos 80^\circ\cos 70^\circ}{\sin 80^\circ\sin 70^\circ}+\sqrt{3}(\operatorname{ctg}80^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ)=\frac{\cos 80^\circ\cos 70^\circ}{\sin 80^\circ\sin 70^\circ}+\frac{\sqrt{3}\sin 150^\circ}{\sin 80^\circ\sin 70^\circ}=$$
$$=\frac{\cos 80^\circ\cos 70^\circ+\sqrt{3}\sin(180^\circ-30^\circ)}{\sin 80^\circ\sin 70^\circ}=\frac{\frac{1}{2}(\cos 10^\circ+\cos 150^\circ)+\sqrt{3}\sin 30^\circ}{\sin 80^\circ\sin 70^\circ}=$$
$$=\frac{\cos 10^\circ+\cos(180^\circ-30^\circ)+\sqrt{3}}{2\sin 80^\circ\sin 70^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\cos 30^\circ+\sqrt{3}}{\cos 10^\circ+\cos 30^\circ}=$$
$$=\frac{\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

Что и требовалось доказать.

3.425. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ=\sqrt{3}$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ=\frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}+4\cos 70^\circ=\frac{\cos 70^\circ+4\sin 70^\circ\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 70^\circ+2\cos 140^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{\cos 70^\circ+2\sin(90^\circ+50^\circ)}{\sin 70^\circ}=\frac{\cos 70^\circ+2\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}=$$

$$=\frac{(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ)+\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{2\cos 60^\circ\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}=$$

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ}{\sin 70^\circ}=$$

$$=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ}{\sin(90^\circ-20^\circ)}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}.$$

Что и требовалось доказать.

3.426. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ=\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ.$

Решение.

$$\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)=$$

$$=\left(\frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}+\frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ}\right)-\left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}+\frac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ}\right)=\frac{\sin^2 9^\circ+\cos^2 9^\circ}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-$$

$$-\frac{\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}=\frac{1}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}=$$

$$=\frac{2}{2\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{2}{2\sin 27^\circ\cos 27^\circ}=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=$$

$$=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{4\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{4\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}=\frac{4\cos 36^\circ}{\sin(90^\circ-36^\circ)}=$$

$$=\frac{4\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ}=4=\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{2(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)}{\sin 30^\circ}=\frac{2(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)}{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=$$

$$=\frac{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}+\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ.$$

Что и требовалось доказать.

3.427. $\cos 50^\circ+8\cos 200^\circ\cos 220^\circ\cos 80^\circ=2\sin^2 65^\circ.$

Решение.

$$\cos 50^\circ+8\cos 200^\circ\cos 220^\circ\cos 80^\circ=$$

$$=\cos 50^\circ+8\cos(180^\circ+20^\circ)\cos(180^\circ+40^\circ)\cos(90^\circ-10^\circ)=$$

$=\cos 50^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\sin 10^\circ=\cos 50^\circ+4(2\cos 20^\circ\cos 40^\circ)\sin 10^\circ=$

$=\cos 50^\circ+4(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ)\sin 10^\circ=\cos 50^\circ+4\left(\cos 20^\circ+\dfrac{1}{2}\right)\sin 10^\circ=$

$=\cos 50^\circ+2(2\sin 10^\circ\cos 20^\circ)+2\sin 10^\circ=\cos 50^\circ-2\sin 10^\circ+$

$+2\sin 30^\circ+2\sin 10^\circ=\cos 50^\circ+2\cdot\dfrac{1}{2}=\cos 50^\circ+1=$

$=\cos(180^\circ-130^\circ)+1=-\cos 130^\circ+1=1-\cos 130^\circ=1-\cos 2(65^\circ)=$

$=1-(1-2\sin^2 65^\circ)=1-1+2\sin^2 65^\circ=2\sin^2 65^\circ.$

Что и требовалось доказать.

3.428. $\sin 18^\circ\sin 54^\circ=\dfrac{1}{4}.$

Решение.

$\sin 18^\circ\sin 54^\circ=\sin 18^\circ\sin(90^\circ-36^\circ)=\sin 18^\circ\cos 36^\circ=\sin 18^\circ\cos 2(18^\circ)=$

$=\sin 18^\circ(1-2\sin^2 18^\circ)=X.$

Найдем $\sin 18^\circ$. Так как $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$, то

$\sin 2(18^\circ)=\cos 3(18^\circ)\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3, 2\sin 18^\circ=4(1-\sin^2 18^\circ)-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ=1\Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2\sin 18^\circ+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$(\sin 18^\circ>0)$, $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

Подставив найденное значение в X найдем

$$X=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right)=\frac{1}{4}.$$

Что и требовалось доказать.

3.429. $\sin^2\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}.$

Решение.

$$\sin^2\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\sin\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2=$$

$$=\left(\sin(\operatorname{arctg}3)\cdot\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-\cos(\operatorname{arctg}3)\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2=$$

$$=\left[\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\cos(\operatorname{arcctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\right.$$

$$\left.\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{1+9}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}-\frac{1}{\sqrt{1+9}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\right)^2=\left(-\frac{3}{\sqrt{50}}-\frac{2}{\sqrt{50}}\right)^2=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.430. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{atcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}.$

Решение.

$$\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{atcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\left(\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)^2=$$

$$=\left(\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)-\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)^2=$$

$$=\left[\sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\cos(\operatorname{arcctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}\right)^2=\left(\frac{-2}{\sqrt{50}}-\frac{3}{\sqrt{50}}\right)^2=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.431. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}.$

Решение.

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=$$

$$=2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)}=$$

$$=\left[\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\right.$$

$$\left.\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1;\sin(\arcsin x)=x,-1\le x\le 1\right]=$$

$$=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}+\frac{1-\sqrt{1-\frac{225}{289}}}{\frac{15}{17}}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}.$$

Что и требовалось доказать.

3.432. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{1}{5}.$

Решение.

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=$$

$$=\left[\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\right.$$

$$\left.\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1;\sin(\arcsin x)=x,-1\le x\le 1\right]=$$

$$=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}-\frac{1-\sqrt{1-\frac{225}{289}}}{\frac{15}{17}}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

Что и требовалось доказать.

3.433. $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=\frac{9}{25}$.

Решение.

$$\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=2\cos^2(\operatorname{arctg}2)-1-2\sin(2\operatorname{arctg}3)\times$$
$$\times\cos(2\operatorname{arctg}3)=2(\cos(\operatorname{arctg}2))^2-1-4\sin(\operatorname{arctg}3)\cos(\operatorname{arctg}3)\times$$
$$\times\left(2(\cos(\operatorname{arctg}3))^2-1\right)=\left[\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$
$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{1+4}}\right)^2-1-4\cdot\frac{3}{\sqrt{1+9}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+9}}\cdot\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{1+9}}\right)^2-1\right)=$$
$$=\frac{2}{5}-1-\frac{12}{10}\left(\frac{1}{5}-1\right)=\frac{2}{5}-1+\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{9}{25}.$$

Что и требовалось доказать.

3.434. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

Решение.

Если $\alpha=\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}$, то

$$\cos\alpha=\cos\left(\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}\right)=\cos\left(\arccos\frac{36}{85}\right)\cos\left(\arccos\frac{15}{17}\right)+$$
$$+\sin\left(\arccos\frac{36}{85}\right)\sin\left(\arccos\frac{15}{17}\right)=$$
$$=\left[\cos(\arccos x)=x,-1\le x\le 1;\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right]=$$
$$=\frac{36}{85}\cdot\frac{15}{17}+\sqrt{1-\frac{1296}{7225}}\cdot\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\frac{540}{1445}+\sqrt{\frac{5929}{7225}}\cdot\sqrt{\frac{64}{289}}=$$
$$=\frac{540}{1445}+\frac{77}{85}\cdot\frac{8}{17}=\frac{540}{1445}+\frac{616}{1445}=\frac{1156}{1445}=\frac{4}{5}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{4}{5}.$$

Так как $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},-1\le x\le 1$, то $\alpha=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

Что и требовалось доказать.

3.435. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}=\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}\right)=-\sin\left(\arccos\frac{36}{85}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{36}{85}\right)^2}=$$

$$=-\sqrt{1-\frac{1296}{7225}}=-\sqrt{\frac{7225-1296}{7225}}=-\sqrt{\frac{5929}{7225}}=-\frac{77}{85},$$

$$\cos\left(\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=\cos\left(\arccos\frac{15}{17}\right)\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)-$$

$$-\sin\left(\arccos\frac{15}{17}\right)\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=$$

$$=\frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=$$

$$=-\frac{9}{17}-\sqrt{1-\frac{225}{289}}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{9}{17}-\sqrt{\frac{289-225}{289}}\cdot\sqrt{\frac{25-9}{25}}=$$

$$=-\frac{9}{17}-\sqrt{\frac{64}{289}}\cdot\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{9}{17}-\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{9}{17}-\frac{32}{85}=-\frac{77}{85}.$$

Получили, что $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}\right)=\cos\left(\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Так как углы $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}$ и $\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ принадлежат промежутку $(0;\pi)$, а на этом промежутке $y=\cos x$ — монотонно убывающая, то значения аргументов также совпадают, что и требовалось доказать.

3.436. $\cos(2\operatorname{arcctg}7)=\sin(4\operatorname{arcctg}3)$.

Решение.

Если $\alpha=\cos(2\operatorname{arcctg}7)$, $\beta=\sin(4\operatorname{arcctg}3)$, то

$$\alpha=\cos^2(\operatorname{arcctg}7)-1=2(\cos(\operatorname{arcctg}7))^2-1=$$

$$=\left[\cos(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=2\left(\frac{7}{\sqrt{1+(7)^2}}\right)^2-1=2\cdot\frac{49}{50}-1=\frac{49}{50}-1=\frac{24}{25}.$$

$$\beta=2\sin(2\operatorname{arcctg}3)\cos(2\operatorname{arcctg}3)=4\sin(\operatorname{arcctg}3)\cos(\operatorname{arcctg}3)\times$$

$$\times\left(2\cos^2(\operatorname{arcctg}2)-1\right)=4\sin(\operatorname{arcctg}3)\cos(\operatorname{arcctg}3)\left(2(\cos(\operatorname{arcctg}3))^2-1\right)=$$

$$=\left[\sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\cos(\operatorname{arcctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(3)^2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+(3)^2}}\cdot\left(2\left(\frac{3}{\sqrt{1+(3)^2}}\right)^2-1\right)=\frac{12}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{24}{25}.$$

Получили, что $\alpha=\beta$, т.е. cos (2arcctg 7) = sin (4 arcctg 3), что и требовалось доказать.

3.437. $\cos\frac{11\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.$

Решение.

$$\cos\frac{11\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=-2\sin\frac{13\pi}{10}\sin\frac{9\pi}{10}=-2\sin\frac{10\pi+3\pi}{10}\sin\frac{10\pi-\pi}{10}=$$

$$=-2\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{10}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}=$$

$$=\left[\sin3x=3\sin x-4\sin^3x\right]=2\left(3\sin\frac{\pi}{10}-4\sin^3\frac{\pi}{10}\right)\sin\frac{\pi}{10}=$$

$$=2\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\sin^2\frac{\pi}{10}=2\left(3-4\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^2\right)\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^2=$$

$$=2\left(3-4(\sin18^\circ)^2\right)(\sin18^\circ)^2=\left[\sin18^\circ=\frac{\sqrt5-1}{4}\right]=$$

$$=2\left(3-4\cdot\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

3.438. $\sin84^\circ\sin24^\circ\sin48^\circ\sin12^\circ=\frac{1}{16}.$

Решение.

$$(\sin 84^\circ \sin 24^\circ)(\sin 48^\circ \sin 12^\circ) = \frac{(\cos 60^\circ - \cos 108^\circ)(\cos 36^\circ - \cos 60^\circ)}{4} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \cos 108^\circ\right)\left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{(1 - 2\cos 108^\circ)(2\cos 36^\circ - 1)}{16} =$$

$$= \frac{(1 - 2\cos(90^\circ + 18^\circ))(2\cos 2(18^\circ) - 1)}{16} = \frac{(1 + 2\sin 18^\circ)(2(1 - 2\sin^2 18^\circ) - 1)}{16} =$$

$$= \frac{(1 + 2\sin 18^\circ)(1 - 4\sin^2 18^\circ)}{16} = \left[\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right] =$$

$$= \frac{\left(1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)\left(1 - 4\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2\right)}{16} = \frac{1}{16}.$$

Что и требовалось доказать.

3.439. $\operatorname{tg} 830^\circ + \operatorname{tg} 770^\circ + \operatorname{tg} 740^\circ = \operatorname{tg} 470^\circ \cdot \operatorname{tg} 410^\circ \cdot \operatorname{tg} 380^\circ$.

Решение.

Из условия имеем

$\operatorname{tg}(810^\circ + 20^\circ) + \operatorname{tg}(720^\circ + 50^\circ) + \operatorname{tg}(720^\circ + 20^\circ) =$

$= \operatorname{tg}(450^\circ + 20^\circ)\operatorname{tg}(450^\circ - 40^\circ)\operatorname{tg}(360^\circ + 20^\circ);$

$-\operatorname{ctg} 20^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ = -\operatorname{ctg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{tg} 20^\circ;$

$(\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 20^\circ) + \operatorname{tg} 50^\circ = -(\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ)\operatorname{ctg} 40^\circ;$

$$\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right) + \operatorname{tg} 50^\circ = -\operatorname{ctg} 40^\circ;$$

$$\frac{\sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} + \operatorname{tg} 50^\circ = -\operatorname{ctg} 40^\circ;$$

$$-\frac{2(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ)}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} + \operatorname{tg} 50^\circ = -\operatorname{ctg} 40^\circ;$$

$$-\frac{2\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} + \operatorname{tg} 50^\circ = -\operatorname{ctg} 40^\circ;$$

$-2\operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = -\operatorname{ctg} 40^\circ;$

$-2\operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{tg}(90^\circ - 40^\circ) = -\operatorname{ctg} 40^\circ;$

$$-2\operatorname{ctg}40^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ=-\operatorname{ctg}40^\circ;$$
$$-\operatorname{ctg}40^\circ=-\operatorname{ctg}40^\circ.$$

Что и требуется доказать.

3.440. $\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}54^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}12^\circ=1.$

Решение.

$$\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}54^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}12^\circ=$$
$$=\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}(90^\circ-36^\circ)+\operatorname{tg}(90^\circ-36^\circ)\operatorname{tg}12^\circ=$$
$$=\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{ctg}36^\circ+\operatorname{ctg}36^\circ\operatorname{tg}12^\circ=$$
$$=\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\frac{\operatorname{tg}24^\circ}{\operatorname{tg}36^\circ}+\frac{\operatorname{tg}12^\circ}{\operatorname{tg}36^\circ}=\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}2(12^\circ)+\frac{\operatorname{tg}2(12^\circ)}{\operatorname{tg}3(12^\circ)}+\frac{\operatorname{tg}12^\circ}{\operatorname{tg}3(12^\circ)}=$$
$$=\left[\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x},x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},k\in Z,x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z,\right.$$
$$\left.\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x},x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},n\in Z\right]=$$
$$=\operatorname{tg}12^\circ\cdot\frac{2\operatorname{tg}12^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 12^\circ}+\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}12^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 12^\circ}}{\dfrac{3\operatorname{tg}12^\circ-\operatorname{tg}^3 12^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 12^\circ}}+\frac{\operatorname{tg}12^\circ}{\dfrac{3\operatorname{tg}12^\circ-\operatorname{tg}^3 12^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 12^\circ}}=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}^2 12^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 12^\circ}+\frac{2\operatorname{tg}12^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 12^\circ}\cdot\frac{1-3\operatorname{tg}^2 12^\circ}{\operatorname{tg}12^\circ(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}+\frac{\operatorname{tg}12^\circ(1-3\operatorname{tg}^2 12^\circ)}{\operatorname{tg}12^\circ(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}^2 12^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 12^\circ}+\frac{2-6\operatorname{tg}^2 12^\circ}{(1-\operatorname{tg}^2 12^\circ)(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}+\frac{1-3\operatorname{tg}^2 12^\circ}{3-\operatorname{tg}^2 12^\circ}=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}^2 12^\circ(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)+2-6\operatorname{tg}^2 12^\circ+(1-3\operatorname{tg}^2 12^\circ)(1-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}{(1-\operatorname{tg}^2 12^\circ)(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}=$$
$$=\frac{6\operatorname{tg}^2 12^\circ-2\operatorname{tg}^4 12^\circ+2-6\operatorname{tg}^2 12^\circ+1-4\operatorname{tg}^2 12^\circ+3\operatorname{tg}^4 12^\circ}{(1-\operatorname{tg}^2 12^\circ)(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^4 12^\circ-4\operatorname{tg}^2 12^\circ+3}{(1-\operatorname{tg}^2 12^\circ)(3-\operatorname{tg}^2 12^\circ)}=\frac{(\operatorname{tg}^2 12^\circ-1)(\operatorname{tg}^2 12^\circ-3)}{(\operatorname{tg}^2 12^\circ-1)(\operatorname{tg}^2 12^\circ-3)}=1.$$

Что и требовалось доказать.

Вычислить (3.441 — 3.462):

3.441. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $-1\le\frac{2b}{a}\le 1$.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{12\pi-\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{12\pi-\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(3\pi+\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\operatorname{ctg}\left(3\pi-\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\left[\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}, x,y\ne\pi n, n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\left[\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{2}-\cos\left(\arccos\frac{2b}{a}\right)}=$$

$$=-\frac{2}{\cos\left(\arccos\frac{2b}{a}\right)}=[\cos(\arccos x)=x, -1\le x\le 1]=-\frac{2}{\frac{2b}{a}}=-\frac{a}{b}.$$

Ответ: $-\frac{a}{b}$ при $-1\le\frac{2b}{a}\le 1$.

3.442. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $-1\le\frac{2b}{a}\le 1$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{8\pi-\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{8\pi-\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(2\pi+\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\operatorname{tg}\left(2\pi-\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y},\ x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\right]=$$

$$=\frac{-2}{\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(\arccos\frac{2a}{b}\right)}=-\frac{2}{\frac{2a}{b}}=-\frac{b}{a}.$$

Ответ: $-\frac{b}{a}$ при $-1\leq\frac{2a}{b}\leq 1.$

3.443. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-1+\cos\left(5\pi+\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)=$$

$$=1-1+\cos\left(5\pi+\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)=\cos\left(5\pi+\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)=$$

$$=-\cos\left(\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right]=$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt[4]{2}}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2\sqrt[4]{2}}{3}$.

3.444. $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Решение.

$$\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)\right)^3-\left(\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)^3=$$

$$=\left(\frac{1+\cos\left(3\pi-\arcsin\frac{3}{5}\right)}{2}\right)^3-\left(\frac{1+\cos\left(5\pi+\arcsin\frac{4}{5}\right)}{2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}{2}\right)^3=$$

$$=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right]=$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{10}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3=-\frac{7}{1000}.$$

Ответ: – 0,007.

3.445. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

Решение.

$$\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{4}-\left(\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{1+\cos\left(5\pi+\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{1-\frac{4}{5}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{100}=\frac{6}{25}.$$

Ответ: $\frac{6}{25}$.

3.446. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Решение.

$$\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{4}-\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{1+\cos\left(3\pi-\arcsin\frac{3}{5}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}{2}\right)^2=$$

$$=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right]=\frac{1}{4}-\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{1-\frac{4}{5}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{100}=\frac{6}{25}.$$

Ответ: $\frac{6}{25}$.

3.447. $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$.

Решение.

$$\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)=\arccos\left(2\cos^2\left(\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)\right)=$$

$$=\arccos\left(2\left(\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2-1\right)\right)=\left[\cos\left(\operatorname{arcctg}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\arccos\left(2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}\right)^2-1\right)=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

3.448. $\arcsin\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$

Решение.

$$\arcsin\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)=\arcsin\left(2\cos^2\left(\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)\right)=$$

$$=\arcsin\left(2\left(\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2-1\right)\right)=\left[\cos\left(\operatorname{arcctg}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\arcsin\left(2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}\right)^2-1\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

3.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, где $a<0$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},x,y,x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)+\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)}=$$

$$=\left[\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},-1\leq x<0,0<x\leq 1\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}+\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}}{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}}{1-\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}}{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}}=\frac{1-a^2}{2a}.$$

Ответ: $\frac{1-a^2}{2a}$.

3.450. $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Решение.

$$\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\left(\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)\right)^3+\left(\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)^3=$$

$$=\left(\frac{1+\cos\left(5\pi+\arcsin\frac{3}{5}\right)}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos\left(7\pi-\arcsin\frac{4}{5}\right)}{2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}{2}\right)^3=$$

$$=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\right]=$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{9}{1000}.$$

Ответ: 0,009.

3.451. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

Решение.

$\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ =$

$= \cos(270^\circ-10^\circ)\sin(180^\circ-50^\circ)\cos(180^\circ-20^\circ)=$

$= -\sin 10^\circ \sin 50^\circ(-\cos 20^\circ)=(\sin 10^\circ \sin 50^\circ)\cos 20^\circ=$

$=\frac{1}{2}(\cos 40^\circ-\cos 60^\circ)\cos 20^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ=$

$=\frac{1}{4}(2\cos 40^\circ-1)\cos 20^\circ=\frac{1}{4}(2\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ)=$

$=\frac{1}{4}(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ-\cos 20^\circ)=\frac{1}{4}\cos 60^\circ=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

3.452. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}=\frac{1-\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}{-\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)-1}{\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}=\frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}-1}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}{2}}-1}{\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}{2}}}=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}}-1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3.453. $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\left(\pi-\arccos\frac{4}{5}\right)\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{6\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}}=\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}}=\sqrt{10}-3.$$

Ответ: $\sqrt{10}-3$.

3.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение.

$$\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\left(\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)^2=$$

$$=\left(\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)^2=$$

$$=\left[\sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\right.$$

$$\left.\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$\left(=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\right)^2=\frac{49}{50}=0{,}98.$$

Ответ: 0,98.

3.455. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right).$

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},\ x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)-\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}-\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}{1+\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}\cdot\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)-\left(1-\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)+2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)-\left(\left(1-\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\right)^2\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}{1-\left(\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2\right)+2\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ x\in[-1;\,0)\cup(0;\,1];\\ \operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{2\sqrt{1-\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2}}{\frac{5}{\sqrt{26}}}-\left(1-\left(\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2}}{\frac{5}{\sqrt{26}}}\right)^2\right)\cdot\dfrac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2}}{\frac{5}{\sqrt{26}}}\right)^2+\dfrac{2\sqrt{1-\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2}}{\frac{5}{\sqrt{26}}}\cdot\dfrac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}}=-\frac{119}{120}.$$

Ответ: $-\frac{119}{120}$.

3.456. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\,\mathrm{arctg}(-2)\right)=\left(\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\,\mathrm{arctg}(-2)\right)\right)^2=$$

$$=\left(\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos(2\,\mathrm{arctg}(-2))-\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin(2\,\mathrm{arctg}(-2))\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}\cdot\cos(2\,\mathrm{arctg}(-2))-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}\cdot\sin(2\,\mathrm{arctg}(-2))\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)}\cdot(2\cos^2(\mathrm{arctg}(-2))-1)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)}\cdot 2\sin(\mathrm{arctg}(-2))\cos(\mathrm{arctg}(-2))\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)}\cdot(2(\cos(\mathrm{arctg}(-2)))^2-1)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)}\cdot 2\sin(\mathrm{arctg}(-2))\cos(\mathrm{arctg}(-2))\right)^2=$$

$$=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1;\right.$$

$$\left.\cos(\mathrm{arctg}\,x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin(\mathrm{arctg}\,x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)}\cdot\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}}\right)^2-1\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)}\cdot 2\cdot\frac{-2}{\sqrt{1+(-2)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}}\right)^2=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

3.457. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\left[\operatorname{ctg}(x-y)=-\frac{1+\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y}, x, y, x-y\neq\pi n, n\in Z, x\neq y\right]=$$

$$=-\frac{1+\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)-\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}=$$

$$=-\frac{1+\dfrac{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-1}{2\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}}{\dfrac{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}-\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-1}{2\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}}=$$

$$=-\frac{1+\dfrac{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\dfrac{\left(\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2-1}{2\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}}{\dfrac{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}-\dfrac{\left(\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2-1}{2\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}}=$$

$$=\Big[\cos(\arccos x)=x, -1\leq x\leq 1; \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, -1\leq x\leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x]=-\frac{1+\dfrac{1+\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}\cdot\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}-\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}}=-2.$$

Ответ: –2.

3.458. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-3\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-3\operatorname{arcctg}(-2)\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},\ x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)-\operatorname{tg}(3\operatorname{arcctg}(-2))}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}(3\operatorname{arcctg}(-2))}=$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x},\ x\neq\frac{\pi}{6}(2n+1),\ n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}-\dfrac{3\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2))-\operatorname{tg}^3(\operatorname{arcctg}(-2))}{1-3\operatorname{tg}^2(\operatorname{arcctg}(-2))}}{1+\dfrac{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\dfrac{3\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2))-\operatorname{tg}^3(\operatorname{arcctg}(-2))}{1-3\operatorname{tg}^2(\operatorname{arcctg}(-2))}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}-\dfrac{3\,\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(-2))-(\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(-2)))^3}{1-3(\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(-2)))^2}}{1+\dfrac{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\dfrac{3\,\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(-2))-(\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(-2)))^3}{1-3(\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(-2)))^2}}=$$

$$=\left[\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1;\ \cos(\arccos x)=x,\ -1\le x\le 1;\right.$$

$$\left.\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\,x)=\frac{1}{x},\ x\ne 0\right]=\frac{\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{1+\frac{3}{5}}-\dfrac{\frac{3}{-2}-\frac{1}{-8}}{1-\frac{3}{4}}}{1+\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{1+\frac{3}{5}}\cdot\dfrac{\frac{3}{-2}-\frac{1}{-8}}{1-\frac{3}{4}}}=-\frac{24}{7}.$$

Ответ: $-\dfrac{24}{7}$.

3.459. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+$$

$$+\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}\times$$

$$\times\cos\left(2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}\cdot\sin\left(2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)}\cdot\left(2\cos^2\left(\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-1\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)}\cdot 2\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1;\right.$$

$$\left.\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)}\cdot\left(2\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}\right)^2-1\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{-1}{2}}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.460. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)\cos(2\operatorname{arctg}(-2))+$$

$$+\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)\sin(2\operatorname{arctg}(-2))=$$

$$=\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\cos(2\operatorname{arctg}(-2))+$$

$$+\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\sin(2\operatorname{arctg}(-2))=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)}\cdot\left(2\cos^2(\operatorname{arctg}(-2))-1\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)}\cdot 2\sin(\operatorname{arctg}(-2))\cos(\operatorname{arctg}(-2))=$$

$$=\left[\cos(\arccos x)=x, -1\le x\le 1; \cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\right.$$

$$\left.\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)}\cdot\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}}\right)^2-1\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\right)}\cdot 2\cdot\frac{-2}{\sqrt{1+(-2)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.461. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, x, y\ne\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)}=$$

$$=\left[\cos x\cos y=\frac{1}{2}\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]=$$

$$=\frac{2}{\cos\left(\arccos\frac{b}{a}\right)+\cos\frac{5\pi}{2}}=\frac{2}{\cos\left(\arccos\frac{b}{a}\right)}=\frac{2}{\frac{b}{a}}=\frac{2a}{b}.$$

Ответ: $\frac{2a}{b}$, где $b\neq 0,\ a\neq 0$.

3.462. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)=$$

$$=\left[\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},x,y,x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)-\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(-2))}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(-2))}=$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x},x\neq\pi n,n\in Z;\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x},x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},k\in Z,x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{1-\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}-\dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(-2))}}{1+\dfrac{1-\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(-2))}}=$$

$$=\left[\cos(\arccos x)=x, -1\le x\le 1; \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1;\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x\right]=\frac{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}-\dfrac{2\cdot(-2)}{1-(-2)^2}}{1+\dfrac{1-\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}\cdot\dfrac{2\cdot(-2)}{1-(-2)^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

3.463. Найти $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

Решение.

Пусть $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

Так как

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha\ne\pi+2\pi n, n\in Z; \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha\ne\pi+2\pi k, k\in Z,$$

то имеем

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+2\sqrt{2}}{3},$$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\left(2+\sqrt{2}\right)=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получаем

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{8-4\sqrt{2}+1}}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-3\pm\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}+1}}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-3\pm\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{-3\pm\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)_1=\frac{-3-2\sqrt{2}+1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2}.$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)_2=\sqrt{2}.$$

Тогда

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)_1=\frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)_1}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}=3-2\sqrt{2};$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)_2=\frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: 1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=3-2\sqrt{2}$.

3.464. Доказать, что если $\sin\alpha=\frac{1}{3}, \sin\beta=\frac{1}{3\sqrt{11}}, \sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}}$ (α, β, γ — острые положительные углы), то $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

Решение.

Так как $\alpha+\beta+\gamma=90°$, то $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin 90°=1$.

Имеем $\sin\alpha=\frac{1}{3}, \sin\beta=\frac{1}{3\sqrt{11}}, \sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}}$, где α, β и γ — острые углы, поэтому $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}, \beta=\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}, \gamma=\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}$.

Таким образом получаем

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)+\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+$$

$$+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+$$

$$+\left(\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)-\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\right)\sin\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)=1.$$

$$\sin(\arcsin x)=x, -1\le x\le 1; \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1,$$

следовательно

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}+$$

$$+\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}=1\Leftrightarrow 1=1.$$

Так как $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1$, то $\alpha+\beta+\gamma=90°$, что и требовалось доказать.

3.465. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=m$, найти

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right).$$

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin(-2\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)+\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)+\sin 2\alpha\right)-\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)=$$

$$=\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2m}{1+m^2}.$$

Ответ: $\frac{2m}{1+m^2}$.

3.466. Известно, что $\cos 2\alpha = m$. Найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

Решение.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-$$

$$-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2\alpha\right)=1-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(\cos 2\alpha)^2=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}m^2=\frac{1+3m^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{3m^2+1}{4}$.

3.467. Найти $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha=m$.

Решение.

$$\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\left(\cos^4\alpha\right)^2-\left(\sin^4\alpha\right)^2=\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha\right)=$$

$$=\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\cos 2\alpha\left(1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)\right)=$$

$$=\cos 2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)=\cos 2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2\alpha\right)\right)=$$

$$=\cos 2\alpha\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha\right)=\cos 2\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha)^2\right)=$$

$$=m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m^2\right)=\frac{m\left(1+m^2\right)}{2}.$$

Ответ: $\frac{m\left(m^2+1\right)}{2}$.

3.468. Найти значение выражения $\frac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

Решение.

$$\frac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}=\frac{2\sin 7\alpha\cos 3\alpha-2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 8\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 3\alpha(\sin 7\alpha-\sin 3\alpha)}{\cos 2\alpha+\cos 8\alpha}=\frac{2\cos 3\alpha\cdot 2\cos 5\alpha\sin 2\alpha}{2\cos 5\alpha\cos 3\alpha}=$$

$$=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=-2(1-2\sin\alpha\cos\alpha-1)=$$

$$=-2\left(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1\right)=-2\left((\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1\right)=$$

$=2-2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-2m^2=2(1-m^2)$.

Ответ: $2(1-m^2)$.

3.469. Зная, что $\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{4}{5}$ и что $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, найти $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$.

Решение.

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=\frac{1}{2}(\sin(-2x)+\sin 3x)=\frac{1}{2}(-\sin 2x+\sin 3x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2\sin x\cos x+3\sin x-4\sin^3 x\right)=X.(*)$$

$$\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5},\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\frac{4}{5},$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x=-\frac{4}{5},-\sin x=-\frac{4}{5},\sin x=\frac{4}{5},\sin^2 x=\frac{16}{25},$$

$$1-\cos^2 x=\frac{16}{25},\cos^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25},\cos x=\pm\frac{3}{5}.$$

Так как $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, то $\cos x=\dfrac{3}{5}$. Подставив в (*) значения

$\sin x=\dfrac{4}{5}$ и $\cos x=\dfrac{3}{5}$, получаем

$$X=\frac{1}{2}\left(-2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{4}{5}-4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)=-\frac{38}{125}.$$

Ответ: $-\dfrac{38}{125}$.

3.470. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2$.

Решение.
Имеем

$$A+B+C=180°,\frac{A+B+C}{2}=90°,\cos\frac{A+B+C}{2}=\cos 90°,$$

$$\cos\frac{A+B+C}{2}=0.$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=$$
$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}-2\cos A\cos B\cos C=$$
$$=\frac{3-\cos 2A-\cos 2B-\cos 2C-4\cos A\cos B\cos C}{2}=$$
$$=\frac{3-(\cos 2A+\cos 2B)-\cos 2C-2(2\cos A\cos B)\cos C}{2}=$$
$$=\frac{3-2\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos 2C}{2}-$$
$$-\frac{2(\cos(A-B)+\cos(A+B))\cos C}{2}=$$
$$=\frac{3-2\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos 2C}{2}-$$
$$-\frac{2\cos(A-B)\cos C-2\cos(A+B)\cos C}{2}=$$
$$=\frac{3-2\cos(A+B)\cos(A-B)-2\cos(A-B)\cos C}{2}-$$
$$-\frac{(2\cos^2 C-1)-2\cos(A+B)\cos C}{2}=$$
$$=\frac{3-2\cos(A-B)(\cos(A+B)+\cos C)}{2}-$$
$$-\frac{2\cos^2 C+1-2\cos(A+B)\cos C}{2}=$$
$$=\frac{4-2\cos(A-B)(\cos(A+B)\cos C)}{2}-$$
$$-\frac{2\cos^2 C-2\cos(A+B)\cos C}{2}=$$
$$=2-\cos(A-B)(\cos(A+B)+\cos C)-$$
$$-\cos C(\cos C+\cos(A+B))=$$
$$=2-(\cos(A+B)+\cos C)(\cos(A-B)-\cos C)=$$
$$=2-2\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}\times$$
$$\times\left(-2\sin\frac{A-B+C}{2}\cdot\sin\frac{A-B-C}{2}\right)=X.$$

Так как $\cos\frac{A+B+C}{2}=0$, то $X=2$, что и требовалось доказать.

3.471. Доказать, что если $\cos 2\alpha=\cos 2\beta\cos 2\gamma$, то

$1+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\sin^{-2}\gamma$.

Решение.

$$1+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sin^2\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\frac{1}{\sin^2\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\frac{1}{2}(\cos 2\beta+\cos 2\alpha)}{\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)}=\frac{2}{1-\cos 2\gamma}\Leftrightarrow 1+\frac{\cos 2\beta+\cos 2\alpha}{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2}{1-\cos 2\gamma}\Leftrightarrow\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\alpha}{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}=\frac{2}{1-\cos 2\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos 2\beta}{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}=\frac{2}{1-\cos 2\gamma}\Leftrightarrow\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\beta\left(1-\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta}\right)}=\frac{1}{1-\cos 2\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1-\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta}}=\frac{1}{1-\cos 2\gamma}.$$

Так как $\cos 2\alpha=\cos 2\beta\cos 2\gamma$, то $\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta}=\cos 2\gamma$ и последнее равенство принимает вид $\frac{1}{1-\cos 2\gamma}=\frac{1}{1-\cos 2\gamma}$. Что и требовалось доказать.

3.472. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что $\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$

$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C,$$

где n — целое число.

Решение.

По условию имеем $A+B+C=180°$.

$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$$
$$=2\sin\frac{(2n+1)(A+B)}{2}\cos\frac{(2n+1)(A-B)}{2}+\sin(2n+1)C=$$
$$=2\sin\frac{(2n+1)(A+B)}{2}\cos\frac{(2n+1)(A-B)}{2}+\sin(2n+1)(180^\circ-(A+B))=$$
$$=2\sin\frac{(2n+1)}{2}(A+B)\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+\sin((2n+1)180^\circ-(2n+1)(A+B))=$$
$$=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+\sin(2n+1)(A+B)=$$
$$=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+\sin\left(2\cdot\frac{2n+1}{2}(A+B)\right)=$$
$$=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cos\frac{2n+1}{2}\times$$
$$\times(A+B)=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot\left(\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+\cos\frac{2n+1}{2}(A+B)\right)=$$
$$=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot 2\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B=$$
$$=4\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B=$$
$$=4\sin\frac{2n+1}{2}(180^\circ-C)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B=$$
$$=4\sin\left((2n+1)90^\circ-\frac{2n+1}{2}C\right)\cdot\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B=$$
$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}C\cdot\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B=$$
$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C.$$

Что и требовалось доказать.

3.473. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что $\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC$, где n — целое число.

Решение.

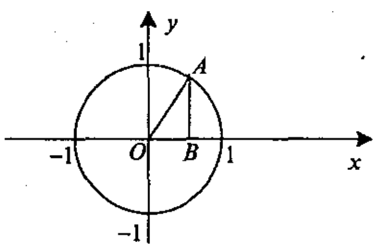
По условию имеем $A+B+C=180^\circ$.

$$(\sin 2nA+\sin 2nB)+\sin 2nC=2\sin n(A+B)\cdot\cos n(A-B)+\sin 2nC=$$

$$=2\sin n(A+B)\cdot\cos n(A-B)+\sin 2n(180^\circ-(A+B))=$$
$$=2\sin n(A+B)\cdot\cos n(A-B)+\sin(360^\circ n-2n(A+B))=$$
$$=2\sin n(A+B)\cdot\cos n(A-B)-\sin 2n(A+B)=$$
$$=2\sin n(A+B)\cdot\cos n(A-B)-2\sin n(A+B)\cos n(A+B)=$$
$$=2\sin n(A+B)(\cos n(A-B)-\cos n(A+B))=$$
$$=2\sin n(A+B)\cdot(-2\sin nA\sin nB)=-4\sin n(A+B)\cdot\sin nA\cdot\sin nB=$$
$$=-4\sin n(180^\circ-C)\cdot\sin nA\cdot\sin nB=-4\sin(180^\circ n-nC)\cdot\sin nA\cdot\sin nB=$$
$$=4\cdot(-1)^{n+1}\sin nA\cdot\sin nB\cdot\sin nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\cdot\sin nB\cdot\sin nC,$$

где n — целое число, что и требовалось доказать.

3.474. Доказать, что равенство $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$ выполняется для всех $\varphi\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ в том и только в том случае, если $x=2$.



Решение.

По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике OAB, $AB^2+OB^2=OA^2$, $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$.

Покажем, что при $x\neq 2$ такое равенство невыполнимо.

Так как $0<\sin\varphi<1, 0<\cos\varphi<1$, то $y=(\sin\varphi)^x, z=(\cos\varphi)^x$ — монотонно убывающие функции.

$1)\ x\in(-\infty;2),$
$$(\sin\varphi)^x>(\sin\varphi)^2, (\cos\varphi)^x>(\cos\varphi)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x>\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1;$$
$2)\ x\in(2;+\infty)$
$$(\sin\varphi)^x<(\sin\varphi)^2, (\cos\varphi)^x<(\cos\varphi)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x<\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1.$$

Таким образом, равенство $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$ выполняется для всех $\varphi\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ в том и только в том случае, если $x=2$.

3.475. Доказать, что выражение $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-\varphi)-$ $-\cos 2\varphi$ не зависит от φ.

Решение.

$$4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=$$
$$=2(2\cos\alpha\cos\varphi)\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=$$
$$=2(\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha-\varphi))\cos(\alpha-\varphi)+1-\cos 2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=$$
$$=2\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)+2\cos^2(\alpha-\varphi)+1-\cos 2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=$$
$$=\cos 2\alpha+\cos 2\varphi+1+\cos 2(\alpha-\varphi)+1-\cos 2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha+2.$$

Полученное выражение не зависит от φ.

3.476. Найти наибольшее значение выражения

$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-4\alpha\right)$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{8}$.

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-4\alpha\right)=$$
$$=\frac{1-\cos\left(\frac{15\pi}{4}-8\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{17\pi}{4}-8\alpha\right)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{15\pi}{4}-8\alpha\right)+\cos\left(\frac{17\pi}{4}-8\alpha\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{16\pi-\pi}{4}-8\alpha\right)+\cos\left(\frac{16\pi+\pi}{4}-8\alpha\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(4\pi-\left(\frac{\pi}{4}+8\alpha\right)\right)+\cos\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{4}-8\alpha\right)\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}+8\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-8\alpha\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-8\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+8\alpha\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin(-8\alpha)\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin 8\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 8\alpha=y.$$

Свое наибольшее значение y при наибольшем значении $\sin 8\alpha = 1$, т.е. тогда, когда $\alpha = \frac{\pi}{16}\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{8}\right)$.

Таким образом $y\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ наибольшее значение выражения.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{16}$.

3.477. Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{8}.$$

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)} = \frac{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{1 + \cos 8\alpha} = \frac{\frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}{1 + \cos 8\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha(1 + \cos 8\alpha)} = \frac{2\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha(1 + 2\cos^2 4\alpha - 1)} = \frac{2\cos 4\alpha}{2\sin 4\alpha \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2}{2\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = \frac{2}{\sin 8\alpha} = y > 0.$$

При постоянном числителе дробь y будет наименьшей, когда знаменатель — наибольший, т.е. $\sin 8\alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{16}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{8}\right)$.

Таким образом, $y\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ — наименьшее значение выражения y.

Ответ: 2 при $\alpha = \frac{\pi}{16}$.

3.478. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 60°, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$.

Решение.

$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}+\sin 3C=0.$

Так как A, B и C — углы треугольника, то $A+B+C=180°$ и $C=180°-(A+B)$.

Имеем

$$2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}+\sin 3(180°-(A+B))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}+\sin(540°-3(A+B))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}+\sin 3(A+B)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}+2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A+B)}{2}=$$

$$=\sin\frac{3(A+B)}{2}\left(\cos\frac{3(A-B)}{2}+\cos\frac{3(A+B)}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3(A+B)}{2}\cdot 2\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3(180°-C)}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(270°-\frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{3A}{2}=0,\\ \cos\frac{3B}{2}=0,\\ \cos\frac{3C}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3A}{2}=90°,\\ \frac{3B}{2}=90°,\\ \frac{3C}{2}=90°\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=60°,\\ B=60°,\\ C=60°.\end{array}\right.$$

3.479. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 36° или 108°, достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$.

Решение.

Пусть $\left[\begin{array}{l} A=36^\circ, \\ A=108^\circ, \end{array}\right.$ тогда $\left[\begin{array}{l} B+C=180^\circ-36^\circ=144^\circ, \\ B+C=180^\circ-108^\circ=72^\circ, \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} C=144^\circ-B, \\ C=72^\circ-B \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=\left[\begin{array}{l} \sin 5\cdot 36^\circ+\sin 5B+\sin 5(44^\circ-B) \\ \sin 5\cdot 108^\circ+\sin 5B+\sin 5(72^\circ-B) \end{array}\right.=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \sin 180^\circ+\sin 5B+\sin(720^\circ-5B)=0, \\ \sin 180^\circ+\sin 5B+\sin(360^\circ-5B)=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5B-\sin 5B=0, \\ \sin 5B-\sin 5B=0. \end{array}\right.$$

Что и требовалось доказать.

3.480. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 36° или 108°, необходимо, чтобы выполнялось равенство $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$.

Решение.

Имеем

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2}+\sin 5C=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2}+\sin 5(180^\circ-(A+B))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2}+\sin(900^\circ-5(A+B))=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2}+\sin 5(A+B)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2}+2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A+B)}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{5(A+B)}{2}\left(\cos\frac{5(A+B)}{2}+\cos\frac{5(A-B)}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{5(A+B)}{2}\cdot 2\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{5(A+B)}{2}=0,\\ \cos\frac{5A}{2}=0,\\ \cos\frac{5B}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{5(A+B)}{2}=180^\circ,\\ \frac{5A}{2}=90^\circ,\\ \frac{5B}{2}=90^\circ,\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A+B=72^\circ,\\ A=36^\circ,\\ B=36^\circ.\end{array}\right.$$

Так как $A+B+C=180^\circ$, то $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(36^\circ+36^\circ)=$ $=180^\circ-72^\circ=108^\circ$ что и требовалось доказать.

3.481. Найти наименьшее значение выражения

$\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Решение.

Пусть $y=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Найдем производную этой функции:

$$y'=\frac{(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)'(\cos 4\alpha+1)-(\cos 4\alpha+1)'(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)(\cos 4\alpha+1)+4\sin 4\alpha(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\cdot(\cos 4\alpha+1)+4\sin 4\alpha\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{\cos 4\alpha+1}{\sin^2\cos^2\alpha}+4\sin 4\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{4(\cos 4\alpha+1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+8\sin 4\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{4(\cos 4\alpha+1)}{\sin^2 2\alpha}+16\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{4(2\cos^2 2\alpha-1+1)}{\sin^2\alpha}+16\cos^2 2\alpha}{(\cos 4\alpha+1)^2}=\frac{-\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+16\cos^2 2\alpha}{(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-8\cos^2 2\alpha+16\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\cos 4\alpha+1)^2}=\frac{-8\cos^2 2\alpha(1-2\sin^2 2\alpha)}{\sin^2 2\alpha(\cos 4\alpha+1)^2}=$$

$$=\frac{-8\cos^2 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha(\cos 4\alpha+1)^2}=\frac{-8\cos^2 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha(2\cos^2 2\alpha-1+1)^2}=\frac{-8\cos^2 2\alpha\cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha\cdot 4\cos^4 2\alpha}=$$

$$=\frac{-8\cos 4\alpha}{4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}=\frac{-8\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}.$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{-8\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}=0, \cos 4\alpha=0, 4\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

или $\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z.$

Критическая точка, попадающая в промежуток $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, точка $\alpha=\frac{\pi}{8}$. *Имеем*

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{\cos 4\cdot\frac{\pi}{8}+1}=\frac{\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}-\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}}{\cos\frac{\pi}{2}+1}=\frac{\frac{\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}}{1}=$$

$$=\frac{2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)}{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=2.$$

При переходе через точку $\alpha=\frac{\pi}{8}$ производная функции $y'=\frac{-8\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}$

меняет свой знак с минуса на плюс. Таким образом, $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$ — наименьшее значение функции $y=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Ответ: 2 при $\alpha=\frac{\pi}{8}$.

3.482. Найти наибольшее значение выражения

$$\frac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \text{ при } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Решение.

$$\frac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\alpha-1+1}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha=y.$$

y принимает свое наибольшее значение, когда $\sin 2\alpha$ — наибольший, т.е. $\sin 2\alpha=1, \alpha=\frac{\pi}{4}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ — наибольшее значение выражения.

Ответ: $\frac{1}{2}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3.483. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$, то $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ и $\cos 2\alpha=$ $=-\cos 2\beta$.

Решение.

Из условия имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=1\Rightarrow \sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta\Rightarrow \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta=$$

$$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\Leftrightarrow(1-\cos2\alpha)(1-\cos2\beta)=(1+\cos2\alpha)(1+\cos2\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\cos2\alpha-\cos2\beta=\cos2\alpha+\cos2\alpha\Leftrightarrow\cos2\alpha=-\cos2\beta.$$

Далее, из последнего равенства получаем

$$1-\cos^2 2\alpha=1-\cos^2 2\beta\Leftrightarrow\sin^2 2\alpha=\sin^2 2\beta\Leftrightarrow|\sin2\alpha|=|\sin2\beta|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\sin\alpha\cdot\cos\alpha|=|\sin\beta\cdot\cos\beta|.$$

Так как $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=1$, то $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ имеют одинаковый знак, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ и $\sin\beta\cdot\cos\beta$ также одинакового знака.

Таким образом $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos\beta\Leftrightarrow\sin2\alpha=\sin2\beta$.

Что и требовалось доказать.

3.484. Зная, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)=\frac{4}{3}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$, найти $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

Решение.

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=\frac{1}{2}(\cos2x+\cos3x)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2x-1+4\cos^3x-3\cos x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(4\cos^3x+2\cos^2x-3\cos x-1\right)=y.$$

Так как $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\frac{4}{3}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}x=\frac{4}{3}\Rightarrow\operatorname{tg}^2x=\frac{16}{9};\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{16}{9};\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{16}{9};\frac{1}{\cos^2x}-1=\frac{16}{9};$$

$$\frac{1}{\cos^2x}=1+\frac{16}{9};\frac{1}{\cos^2x}=\frac{25}{9};\cos^2x=\frac{9}{25},\cos x=\pm\frac{3}{5}.$$

Учитывая, что $0<x<\frac{\pi}{2}$, имеем $\cos x=\frac{3}{5}$.

Подставляя это значение $\cos x$ в y, находим

$$y=\frac{1}{2}\left(4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-3\cdot\frac{3}{5}-1\right)=-\frac{76}{125}.$$

Ответ: $-\frac{76}{125}$.

3.485. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}=\frac{1}{(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3}=$$

$$=\frac{1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}=\frac{1}{(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1-3\sin^3\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{3}{8}(1-\cos 4\alpha)}=\frac{8}{8-3+3\cos 4\alpha}=\frac{8}{5+3\cos 4\alpha}=y>0.$$

При постоянном числителе дробь y будет наибольшей, когда знаменатель наименьший, т.е. $\cos 4\alpha=-1, \alpha=\frac{\pi}{4}\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$ — наибольшее значение выражения.

Ответ: 4 при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3.486. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Решение.

Пусть

$$y=\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=\frac{1}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\alpha)}=\frac{4}{3+\cos 4\alpha}.$$

Дробь $y>0$ будет наибольшей, когда знаменатель будет наименьшим, т.е. $\cos 4\alpha=-1, \alpha=\frac{\pi}{4}\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ наибольшим является значение функции $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.

Ответ: 2 при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3.487. Зная, что $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\frac{3}{5}$, найти $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}$.

Решение.

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 3x)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 x-1-4\cos^3 x+3\cos x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-4\cos^3 x+2\cos^2 x+3\cos x-1\right).$$

Так как $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\frac{3}{5}$, то $\cos x=\frac{3}{5}$, следовательно

$$\frac{1}{2}\left(-4\cos^3 x+2\cos^2 x+3\cos x-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+3\cdot\frac{3}{5}-1\right)=\frac{41}{125}.$$

Ответ: $\frac{41}{125}$.

3.488. Доказать, что если для некоторых чисел α, β и γ выполняется равенство $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)$, то тогда каждая из частей этого равенства равна $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$.

Решение.

Имеем

$$(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma),$$
$$(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma).$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$(1-\sin\alpha)^2(1-\sin\beta)^2(1-\sin\gamma)^2=\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\beta\right)\left(1-\sin^2\gamma\right)=$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|1-\sin\alpha||1-\sin\beta||1-\sin\gamma|=|\cos\alpha||\cos\beta||\cos\gamma|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=|\cos\alpha||\cos\beta||\cos\gamma|.$$

Что и требовалось доказать.

3.489. Доказать, что для чисел φ, удовлетворяющих неравенствам $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$, выполняется равенство $1-\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^3\varphi+\ldots=\dfrac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$

Решение.

Если $X=1-\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^3\varphi+\ldots$, то для $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ это выражение является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -\operatorname{tg}\varphi$. По формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, где S — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем

$$X = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\varphi + \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\varphi\right)} = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)},$$

что и требовалось доказать.

3.490. Найти наименьшее значение выражения $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ при $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Пусть

$$y = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 =$$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) =$$

$$= \left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha\right) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= \left(\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - 3\sin^3\alpha\cos^2 = 1 - \frac{3}{4}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{3}{8}\left(1-\cos 4\alpha\right) = \frac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$$

y принимает свое наименьшее значение при наименьшем значении $\cos 4\alpha$, т.е. когда $\cos 4\alpha = -1, \alpha = \dfrac{\pi}{4}\left(0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, наименьшим значением функции будет $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

3.491. Найти наименьшее значение выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Решение.

Пусть

$$y=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=$$
$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos4\alpha)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos4\alpha=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\alpha=$$
$$=\frac{3+\cos4\alpha}{4}=\frac{1}{4}(3+\cos4\alpha).$$

Свое наименьшее значение выражение y принимает, когда $\cos4\alpha=-1, \alpha=\frac{\pi}{4}\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, наименьшим значением выражения $y=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ является $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3.492. Показать, что если α постоянно, то функция $f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$ также является постоянной.

Решение.

$$f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)=$$
$$=\frac{1+\cos2x}{2}+\frac{1+\cos2(\alpha+x)}{2}-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)=$$
$$=\frac{2+\cos2x+\cos2(\alpha+x)}{2}-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)=$$
$$=\frac{2+2\cos(\alpha+2x)\cos\alpha}{2}-\cos\alpha(\cos\alpha+\cos(\alpha+2x))=$$
$$=1+\cos(\alpha+2x)\cos\alpha-\cos\alpha(\cos\alpha+\cos(\alpha+2x))=$$

$=1+\cos\alpha(\cos(\alpha+2x)-\cos\alpha-\cos(\alpha+2x))=1-\cos\alpha\cos\alpha=$
$=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$

Ответ: $f(x)=\sin^2\alpha.$

3.493. Найти сумму $1+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha+...+\cos 4n\alpha.$

Решение.

Пусть $S_n=1+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha+...+\cos 4n\alpha.$ Тогда

$$2S_n\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha\cos 8\alpha+...+$$
$$+2\sin 2\alpha\cos 4n\alpha=2\sin 2\alpha+\sin(-2\alpha)+\sin 6\alpha+\sin(-6\alpha)+$$
$$+\sin 10\alpha+...+\sin(-2(n-1)\alpha)+\sin 2(2n+1)\alpha=2\sin 2\alpha-$$
$$-\sin 2\alpha+\sin 6\alpha-\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+...-\sin 2(n-1)\alpha+$$
$$+\sin 2(2n+1)\alpha=\sin 2\alpha+\sin 2(2n+1)\alpha=2\sin(n+1)2\alpha\cos 2n\alpha.$$

Имеем $S_n=\dfrac{\sin(n+1)2\alpha\cos 2na}{\sin 2\alpha}.$

Ответ: $\dfrac{\sin(n+1)2\alpha\cos 2na}{\sin 2\alpha}.$

3.494. Показать, что если $x=\operatorname{tg}5^\circ, y=\operatorname{tg}20^\circ$ и $z=\operatorname{tg}65^\circ$, то $xy+yz+$ $+zx=1.$

Решение.

Так как $x=\operatorname{tg}5^\circ$, $y=\operatorname{tg}20^\circ$, $z=\operatorname{tg}65^\circ$, то

$$xy+yz+zx=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}5^\circ=$$
$$=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)+\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)\operatorname{tg}5^\circ=$$
$$=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{ctg}25^\circ+\operatorname{ctg}25^\circ\operatorname{tg}5^\circ=$$
$$=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{ctg}25^\circ(\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}5^\circ)=$$
$$=\frac{\sin 5^\circ\sin 20^\circ}{\cos 5^\circ\cos 20^\circ}+\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}\cdot\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ\cos 5^\circ}=$$
$$=\frac{\sin 5^\circ\sin 20^\circ}{\cos 5^\circ\cos 20^\circ}+\frac{\cos 25^\circ}{\cos 5^\circ\cos 20^\circ}=\frac{\sin 5^\circ\sin 20^\circ+\cos 25^\circ}{\cos 5^\circ\cos 20^\circ}=$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ-\cos 25^\circ)+\cos 25^\circ}{\cos 5^\circ\cos 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\cos 15^\circ+\frac{1}{2}\cos 25^\circ}{\cos 5^\circ\cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ+\cos 25^\circ)}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ+\cos 25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ+\cos 25^\circ)}=1,$$

что и требовалось доказать.

3.495. Доказать, что $\operatorname{tg}142^\circ 30'+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ — есть целое число.

Решение.

$$\operatorname{tg}142^\circ 30'+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=\frac{1-\cos 285^\circ}{\sin 285^\circ}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1-\cos(270^\circ+15^\circ)}{\sin(270^\circ+15^\circ)}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=\frac{1-\sin 15^\circ}{-\cos 15^\circ}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{\sin 15^\circ-1}{\cos 15^\circ}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=\left[\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \text{см. № }\mathbf{3.338}\right]=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}-4)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}+$$

$$+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{6-2\sqrt{12}+2-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=\frac{8-4\sqrt{3}-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=2-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2.$$

Ответ: 2.

3.496. Пусть A, B, C — углы треугольника. Доказать, что $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1$.

Решение.

Пусть A, B, C — углы треугольника, a, b, c — его стороны, $S=\frac{abc}{4R}$ —

площадь, R — радиус описанной окружности, $r=\dfrac{S}{p}$ — радиус вписанной окружности, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\frac{b}{\sin B}=2R,\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\frac{a+b+c}{2}=R(\sin A+\sin B+\sin C),$$
$$abc=8R^3\sin A\sin B\sin C.$$

Тогда

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}.$$

Здесь $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (см. № **3.368**). Таким образом

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=\frac{2R^2\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Известно, что $R\ge 2r$, следовательно $R\ge 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1$, что и требовалось доказать.

3.497. Показать, что если $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi$, то $x+y+z=xyz$.

Решение.

Так как $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi$, то $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\pi-\operatorname{arctg}z$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg}z)$.

Отсюда имеем

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}=-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z).$$

Используя то, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\alpha$, получаем

$$\frac{x+y}{1-xy}=-z, x+y=-z+xyz, x+y+z=xyz,$$

что и требовалось доказать.

3.498. Показать, что если $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z=\frac{\pi}{2}$, то $xy+yz+zx=1$.

Решение.

Так как $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z=\frac{\pi}{2}$, то

$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} z$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y)=$

$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} z\right)$.

Отсюда получаем $\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} z)$.

По формулам $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\alpha$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{1}{\alpha}, \alpha\neq 0$, имеем

$$\frac{x+y}{1-xy}=\frac{1}{z}, xz+yz=1-xy, xy+yz+zx=1,$$

что и требовалось доказать.

3.499. Пусть A, B, C — углы треугольника. Доказать, что $8\cos A\cos B\cos C\leq 1$.

Решение.

Воспользуемся неравенством $8\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}\leq 1$ (см. № **3.496**).

Если мы возьмем $\frac{A_1}{2}=90°-A, \frac{B_1}{2}=90°-B, \frac{C_1}{2}=90°-C$, то указанное неравенство принимает вид

$$8\sin(90^\circ - A)\sin(90^\circ - B)\sin(90^\circ - C) \le 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\cos A\cos B\cos C \le 1,$$

что и требовалось доказать.

3.500. Пусть A, B, C — углы треугольника. Используя неравенство $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$, доказать, что $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

Решение.

В № 3.470 было доказано, что

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

По условию имеем,

$$\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B\cos C + 2 \le \frac{9}{4} \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$$
$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C \le \frac{9}{4},$$

что и требовалось доказать.

Решения к главе 4

ПРОГРЕССИИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называемым *разностью прогрессии.*

Если заданы первый член a_1 и разность арифметической прогрессии d, то n-й член арифметической прогресии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1). \tag{4.1}$$

Формула (4.1) называется *формулой общего члена арифметической прогрессии.*

Свойства членов арифметической прогрессии

1. Каждый средний член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{4.2}$$

2. В конечной арифметической прогресии суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = \ldots = 2a_1 + d(n-1). \tag{4.3}$$

Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (4.4)$$

Учитывая (4.3), т.е. что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = 2a_1 + d(n-1)$, формулу (4.4) можно записать в виде

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (4.5)$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, у которой задан первый член b_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же постоянной для данной последовательности число q, называемое *знаменателем прогрессии.*

Если заданы первый член b_1 и знаменатель геометрической прогрессии q, то n-й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \qquad (4.6)$$

Формула (4.6) называется *формулой общего члена геометрической прогрессии.*

Свойства членов геометрической прогрессии

1. Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов, т.е.

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1. \qquad (4.7)$$

2. В конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1} \ldots = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \qquad (4.8)$$

3. Произведение n первых членов геометрической прогрессии с по-

ложительными членами равно корню квадратному из n-й степени произведения ее крайних членов:

$$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}. \tag{4.9}$$

В общем случае

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 \cdot b_n|^n}.$$

Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии

Сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} \quad (q \neq 1). \tag{4.10}$$

Учитывая (4.6), т.е. что $b_n = b_1 q^{n-1}$, формулу (4.10) можно представить в виде

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{4.11}$$

Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

Бесконечный числовой ряд, образованный из членов геометрической прогрессии $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ при $|q| < 1$, сходится, и его сумма S равна

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{4.12}$$

Формулу (4.12) называют также *формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*

4.069. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение.

Пусть a, b, c, — члены геометрической прогрессии; из условия имеем $100a+10b+c-792=100c+10b+a$; $a-4$, b, c — члены арифметической прогрессии. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} b^2=ac, \\ 2b=a-4+c, \\ 100a+10b+c-792=100c+10b+a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=ac, \\ 2b=a-4+c, \\ 99a-792=99c, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b^2=ac, \\ 2b=a-4+c, \\ a=c+8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c+2)^2=(c+8)c, \\ b=c+2, \\ a=c+8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1, \\ b=3, \\ a=9. \end{cases}$$

Отсюда имеем 931.

Ответ: 931.

4.070. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n=2n^2+3n$. Найти десятый член этой последовательности и доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Решение.

По условию имеем $S_n=2n^2+3n$ при любом n.

Обозначим n-й член последовательности через b_n. Тогда $S_n=b_1+$ $+b_2+\ldots+b_n$; $S_{n+1}=S_n+b_{n+1}$ или $b_{n+1}=S_{n+1}-S_n$. Следовательно,

$b_{10}=S_{10}-S_9=2\cdot 10^2+3\cdot 10-2\cdot 9^2-3\cdot 9=41$.

Далее

$$b_{n+1}-b_n=(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=$$
$$=2(n+1)^2+3(n+1)-2n^2-3n-2n^2-3n+2(n-1)^2+3(n-1)=$$
$$=2n^2+4n+2+3n+3-4n^2-6n+2n^2-4n+1+3n-3=3.$$

Получили, что $\{b_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью 3.

Ответ: 41.

4.071. Найти сумму 19 первых членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, $\cdots$, если известно, что $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$.

Решение.

Пусть a_1, a_2, a_3, ... — члены арифметической прогрессии и $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$. Тогда

$$a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=a_1+3d+a_1+7d+a_1+11d+a_1+15d=$$
$$=4a_1+36d=4(a_1+9d)=224,\quad a_1+9d=56.$$

Отсюда

$$S_{19}=\frac{2a_1+(19-1)d}{2}=\frac{2a_1+18d}{2}\cdot 19=\frac{2(a_1+9d)}{2}\cdot 19=56\cdot 19=1064.$$

Ответ: 1064.

4.072. Длины сторон треугольника представляют собой три последовательных члена возрастающей геометрической прогрессии. Сравнить знаменатель этой прогрессии с числом 2.

Решение.

Пусть b, bq, bq^2 — длины сторон треугольника. Так как в треугольнике сумма длин двух сторон всегда больше длины третьей, то $b+bq>bq^2 \Rightarrow q^2-q-1<0$.

Отсюда $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$, так как $\sqrt{5}<3$.

Ответ: меньше 2.

4.073. Найти сумму четырех первых членов геометрической прогрессии, обладающей тем свойством, что ее три первых члена, сумма которых равна $148/9$, являются одновременно первым, четвертым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии.

Решение.

Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 — члены геометрической прогрессии; $b_1+b_2+b_3=\frac{148}{9}$; a_1, a_2, a_3, $\cdots$ — члены арифметической прогрессии и $b_1=a_1$, $b_2=a_4$, $b_3=a_8$. Имеем $b_2=a_1+3d$, $b_3=a_1+7d$, далее получим

$$b_2^2=b_1\cdot b_3 \text{ или } (a_1+3d)^2=a_1\cdot(a_1+7d),$$

$$a_1^2+6a_1d+9d^2=a_1^2+7a_1d,\ a_1d=9d^2,\ a_1=9d.$$

Тогда

$$b_1+b_2+b_3=a_1+a_1+3d+a_1+7d=\frac{148}{9}\Rightarrow$$

$$3a_1+10d=\frac{148}{9},\ d=\frac{4}{9}.$$

Отсюда $a_1=4$, $b_1=a_1=4$. Далее, $b_2=a_4$ или $b_1q=a_1+3d$,

$$4q=4+3\cdot\frac{4}{9}=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3},\ q=\frac{4}{3};\ b_4=b_1q^3=4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{256}{27};$$

$$b_1+b_2+b_3+b_4=\frac{148}{9}+\frac{256}{27}=\frac{700}{27}=25\frac{25}{27}.$$

Ответ: $25\frac{25}{27}$.

4.074. Числа $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Решение.

Поскольку $a_{n+1}-a_n=d$, представим каждое из слагаемых заданной последовательности в следующем виде:

$$\frac{1}{a_1a_2}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d},\ \frac{1}{a_2a_3}=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d},...,$$

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}.$$

Тогда

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d}+...$$

$$...+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-...+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{a_{n+1}-a}{da_1a_{n+1}}=\frac{a_1+nd-a_1}{da_1a_{n+1}}=\frac{nd}{da_1a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}},$$

что и требовалось доказать.

4.075. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию: 7, 14, 21, ... Найти номер члена последовательности, равного 35351.

Решение.

Пусть последовательность a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n обладает тем свойством, что $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = 2d$, $a_4 - a_3 = 3d$, $\ldots$, $a_n - a_{n-1} = (n-1)d$, где d — разность арифметической прогрессии. Сложив почленно эти равенства, получим

$$a_n - a_1 = d + 2d + 3d + \ldots + (n-1)d = \frac{dn(n-1)}{2}.$$

Так как $a_1 = 1$, $d = 7$, $a_n = 35351$, то $35351 - 1 = \frac{7n(n-1)}{2} \Rightarrow n^2 - n - 10100 = 0$, откуда находим $n_1 = -100$, $n_2 = 101$. Корень $n_1 = -100$ не подходит.

Ответ: 101.

4.076. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы три числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

Решение.

Используя свойство арифметической прогрессии, получаем

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a}, \quad \frac{2}{c+a} = \frac{b+a+b+c}{(b+c)(b+a)}, \quad \frac{2}{c+a} = \frac{2b+a+c}{b^2+ab+ac+bc},$$

$$2(b^2+ab+ac+bc) = (c+a)(2b+a+c),$$

$$2b^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2,$$

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

Таким образом a^2, b^2, c^2 составляют арифметическую прогрессию.

4.077. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна –40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти эту прогрессию.

Решение.

Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 — члены геометрической прогрессии, тогда $b_1+b_2+b_3+b_4=-40$, $b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2=3280$. Имеем

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3=-40, \\ b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4+b_1^2q^6=3280, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(q^3+q^2+q+1\right)=-40, \\ b_1^2\left(q^6+q^4+q^2+1\right)=3280. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{b_1^2\left(q^6+q^4+q^2+1\right)}{b_1\left(q^3+q^2+q+1\right)}=\frac{3280}{-40}, \quad \frac{b_1\left(q^4+1\right)}{q+1}=-82.$$

Получили систему

$$\begin{cases} b_1\left(q^3+q^2+q+1\right)=-40, \\ \dfrac{b_1\left(q^4+1\right)}{q+1}=-82. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение полученной системы на второе, получим

$$\frac{q^4+1}{(q+1)\left(q^3+q^2+q+1\right)}=\frac{41}{20} \Leftrightarrow 21q^4+82q^3+82q^2+82q+21=0.$$

Разделим это уравнение на $q^2 \neq 0$. Получим

$$21q^2+82q+82+\frac{82}{q}+\frac{21}{q^2}=0,$$

$$21\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)+82\left(q+\frac{1}{q}\right)+82=0.$$

Обозначим $q+\dfrac{1}{q}=y$. Относительно y уравнение принимает вид $21y^2+82y+40=0$, откуда находим $y_1=-\dfrac{10}{3}$, $y_2=\dfrac{4}{7}$. Тогда $q+\dfrac{1}{q}=$ $=-\dfrac{10}{3}$, $3q^2-10q+3=0$ или $q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{4}{7}$, $7q^2-4q+7=0$. Из уравнения $3q^2-10q+3=0$ находим $q_1=-3$, $q_2=-\dfrac{1}{3}$. Уравнение $7q^2-4q+7=0$ действительных корней не имеет.

Далее, подставляя значение $q_1=-3$ в первое уравнение системы, получим $b_1'=2$. Тогда $b_2'=b_1'q_1=2\cdot(-3)=-6$, $b_3'=b_1'q_1^2=2\cdot(-3)^2=18$, $b_4'=b_1'q_1^3=2\cdot(-3)^3=-54$. Подставляя значение $q_2=-\frac{1}{3}$ в то же уравнение, получим $b_1''=-54$. Тогда

$$b_2''=b_1''q_2=-54\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=18,\quad b_3''=b_1''q_2^2=-54\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=-6,$$

$$b_4''=b_1''q_2^3=-54\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3=2.$$

Ответ: 2, –6, 18, –54 или –54, 18, –6, 2.

4.078. Даны две прогрессии: геометрическая с положительными членами a_n (знаменатель равен q) и возрастающая арифметическая с членами b_n (разность равна d). Найти x из условия $\log_x a_n-b_n=\log_x a_1-b_1$. Всегда ли существует решение?

Решение.

Из условия

$$\log_x a_n-b_n=\log_x a_1-b_1,\quad \log_x a_n-\log_x a_1=b_n-b_1\Rightarrow\log_x\frac{a_n}{a_1}=b_n-b_1.$$

Отсюда

$$x^{b_n-b_1}=\frac{a_n}{a_1},\quad x=\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_n-b_1}}=\left(\frac{a_1q^{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1+(n-1)d-b_1}}=$$

$$=\left(q^{n-1}\right)^{\frac{1}{(n-1)d}}=q^{\frac{n-1}{(n-1)d}}=q^{\frac{1}{d}}=\sqrt[d]{q}.$$

Так как $d>0$ и $q>0$, то выражение $\sqrt[d]{q}$ всегда существует.

Ответ: $\sqrt[d]{q}$; всегда.

4.079. Найти сумму $1+2\cdot3+3\cdot7+\ldots+n\left(2^n-1\right)$.

Решение.

Запишем данную сумму в виде

$$(1\cdot2-1)+\left(2\cdot2^2-2\right)+\left(3\cdot2^3-3\right)+\ldots+n\cdot2^n-n=$$

$$=\left(1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n\right)-(1+2+3+\ldots+n)=S_n-S_k.$$

Вычислим S_n и S_k.

$$S_n = 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + n\cdot 2^n \Rightarrow$$

$$\frac{S_n}{2} = 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^{n-1},$$

$$\frac{S_n}{2} - S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} - n\cdot 2^n.$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии в правой части этого равенства, получим

$$-\frac{1}{2}S_n = \frac{1-2^n}{1-2} - n\cdot 2^n,$$

откуда найдем $S_n = 2^{n+1}\cdot(n-1)+2$.

Вычислим S_k:

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Сумма

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 7 + \ldots + n(2^n - 1) = S_n - S_k =$$
$$= 2^{n+1}(n-1) + 2 - \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Ответ: $2^{n+1}(n-1) + 2 - \dfrac{(n+1)n}{2}$.

4.080. Найти сумму $1\cdot 3 + 3\cdot 9 + 5\cdot 27 + \ldots + (2n-1)\cdot 3^n$.

Решение.

Запишем данную сумму в виде

$$(2\cdot 3 - 3) + (4\cdot 3^2 - 3^2) + (6\cdot 3^3 - 3^3) + \ldots + (2n\cdot 3^n - 3^n) =$$
$$= (2\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + \ldots + 2n\cdot 3^n) - (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n) =$$
$$= 6(1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \ldots + n\cdot 3^{n-1}) - \frac{3(1-3^n)}{1-3} = 6S_n + \frac{3(1-3^n)}{2},$$

где $S_n = 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \ldots + n\cdot 3^{n-1}$.

Отсюда

$$3S_n = 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + n\cdot 3^n,$$

$$-3S_n+S_n=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot 3^n.$$

Используя в правой части этого равенства формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$-2S_n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot 3^n,$$

откуда имеем $S_n=\dfrac{1-3^n+2n\cdot 3^n}{4}$. Тогда

$$1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+\ldots+(2n-1)\cdot 3^n=6S_n+\frac{3(1-3^n)}{2}=$$

$$=6\left(\frac{1-3^n+2n\cdot 3^n}{4}\right)+\frac{3(1-3^n)}{2}=\frac{3}{2}(1-3^n+2n\cdot 3^n+1-3^n)=$$

$$=\frac{3}{2}(2-2\cdot 3^n+2n\cdot 3^n)=3(1-3^n+n\cdot 3^n)=$$

$$=3(3^n(n-1)+1)=3^{n+1}\cdot(n-1)+3.$$

Ответ: $3^{n+1}\cdot(n-1)+3$.

4.081. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известна их сумма S и сумма σ их обратных величин.

Решение.

Пусть b, bq, $\cdots$, bq^{n-1} есть первые n членов заданной геометрической прогрессии.

Из условия

$$\begin{cases} b+bq+\ldots+bq^{n-1}=S, \\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{bq}+\ldots+\dfrac{1}{bq^{n-1}}=\sigma, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=b\dfrac{q^n-1}{q-1}, \\ \sigma=\dfrac{1}{b}\dfrac{1-\dfrac{1}{q^n}}{1-\dfrac{1}{q}}, \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{\sigma}=b^2q^{n-1}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}=b^n\cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

Перемножая выписанные члены геометрической прогрессии, получаем

$$b\cdot(bq)\cdot\left(bq^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(bq^{n-1}\right)=b^n q^{1+2+\ldots+n-1}=b^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}=\left(\frac{S}{\sigma}\right)^2.$$

Ответ: $\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}$.

4.082. Корни уравнения $x^4-10x^2+a=0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти a.

Решение.

Пусть корнями заданного уравнения будут x_1, x_2, x_3 и x_4. По теореме Виета получаем

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-10,\\ x_1x_2x_3x_4=a.\end{cases}$$

Из условия $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=d$, где d — это разность арифметической прогрессии. Отсюда

$$\begin{cases}(x_1+x_4)+(x_2+x_3)=0,\\ x_1x_2x_3x_4=a,\\ (x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3=-10,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_4=x_2+x_3=0,\\ x_1x_4+x_2x_3=-10,\\ x_1^2x_2^2=a,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1+(x_1+3d)=0,\\ x_1^2+(x_1+d)^2=10,\\ x_1^2(x_1+d)^2=a,\end{cases}\Rightarrow 1)\,x_1=3,\,d=-2,\text{ или } 2)\,x_1=-3,\,d=2.$$

В обоих случаях $a=3^2\cdot 1^2=9$.

Ответ: $a=9$.

4.083. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа x, y и z в указанном порядке составляли геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)=(xy+yz)^2$.

Решение.

По основному свойству три числа x, y, z составляют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $y^2 = xz$, где $xyz \neq 0$.

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^4 + y^2z^2 = x^2y^2 + 2xy^2z + y^2z^2 \Leftrightarrow$$

$$y^4 = 2xy^2z - x^2z^2 \Leftrightarrow y^4 - 2y^2xz + x^2z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - xz)^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = xz.$$

4.084. В соревнованиях по волейболу участвовало n команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу. За каждую игру выигравшей команде засчитывалось одно очко, за проигрыш очки не начислялись; ничьих в волейболе нет. По окончании соревнований выяснилось, что набранные командами очки образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

Решение.

Пусть набранные командами очки образуют арифметическую прогрессию $a_1, a_2, ..., a_n$ с разностью d, где $d \geq 0$. Всего было сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ игр, поэтому и общее число очков будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Имеем

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow (2a_1 + (n-1)d)\frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = (n-1)(1-d).$$

По условию a_1 и d — целые, отсюда $d = 0$ или $d = 1$. Имеется команда, занявшая последнее место, следовательно, $d \neq 0$ и $d = 1$, а значит, $a_1 = 0$.

Ответ: 0.

4.085. Числа x, y, z, t являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $xt = 24$, $y^3 + z^3 = 288$. Найти $x + t$.

Решение.

По условию, $y = xq$, $z = xq^2$, $t = xq^3$, где q — знаменатель прогрессии. Имеем

$$x^2q^3 = 24 \text{ и } x^3q^3 + x^3q^6 = 288, \text{ или } x^3q^3(1+q^3) = 288.$$

Тогда получим

$$24x(1+q^3) = 288, \text{ откуда } x(1+q^3) = 12.$$

Это и есть ответ, так как $x + t = x + xq^3 = x(1+q^3) = 12$.

Ответ: 12.

Решения к главе 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для любых a, b и c верны равенства:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{6.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{6.2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{6.3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6.4}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{6.5}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{6.6}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{6.7}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \cdot \tag{6.8}$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнением с одним неизвестным называется равенство

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{6.9}$$

где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — некоторые заданные функции переменной x над числовым множеством M.

Решением (корнем) уравнения (6.9) с одним неизвестным называется такое численное значение неизвестного, взятое из множества чисел, указанных в условии уравнения, которое обращает данное уравнение в тождество (верное равенство).

Решить уравнение — это значит найти множество всех его решений или показать, что решений нет.

Областью допустимых значений неизвестного (ОДЗ) уравнения (6.9), называется множество всех значений, взятых из числового множества, над которым задано уравнение, при которых существуют обе функции (части уравнения) $f_1(x)$ и $g_1(x)$.

Пусть в результате преобразования уравнения (6.9) получено уравнение

$$f_2(x) = g_2(x). \qquad (6.10)$$

Если все решения уравнения (6.9) являются решениями уравнения (6.10), то уравнение (6.10) называется следствием уравнения (6.9).

Два уравнения (6.9) и (6.10) с одним и тем же неизвестным называются равносильными (эквивалентными), если уравнение (6.10) является следствием уравнения (6.9) и, наоборот, уравнение (6.9) является следствием уравнения (6.10) или если оба уравнения решений не имеют.

При преобразованиях уравнения область его допустимых значений может изменяться, полученное уравнение в общем случае неравносильно данному. Если при некоторых преобразованиях ОДЗ уравнения расширяется, то полученное уравнение может иметь корни, *посторонние* для данного уравнения.

Если обе части данного уравнения возвести в одну и ту же степень, то все его корни будут корнями полученного уравнения, т.е. полученное уравнение всегда будет следствием данного, обратное утверждение не всегда имеет место.

Всякое *целое рациональное алгебраическое уравнение n-й степени с одним неизвестным* может быть записано в виде

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0), \qquad (6.11)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — заданные числа (коэффициенты уравнения), x — неизвестное, n — натуральное число.

Коэффициенты a_n и a_0 называются соответственно *старшим коэффициентом* и *свободным членом* уравнения (6.11).

Уравнение первой степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение первой степени называют просто *уравнением первой степени*.

Любое уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к каноническому виду

$$ax+b=0 \quad (a \neq 0) \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить $n=1$, $a_1=1$ и $a_0=b$.

Уравнение $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ в множестве действительных чисел всегда имеет решение, и притом только одно:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Уравнение второй степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение второй степени называется *уравнением второй степени*, или *квадратным уравнением.*

Всякое квадратное уравнение с одним неизвестным можно привести к каноническому виду

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0) \tag{6.13}$$

Уравнение (6.13) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить $n=2$, $a_2=a$, $a_1=b$ и $a_0=c$.

Квадратное уравнение (6.13), записанное в канонической форме, называется *неполным*, если хотя бы один из его коэффициентов, кроме старшего a, равен нулю.

Если все коэффициенты квадратного уравнения, записанного в каноническом виде, отличны от нуля, то оно называется *полным.*

Полное квадратное уравнение, старший коэффициент которого равен 1 (a = 1), называется *приведенным квадратным уравнением*; оно имеет вид

$$x^2+px+q=0. \tag{6.14}$$

Формулы корней полного квадратного уравнения

Если $D=b^2-4ac \geq 0$ (*дискриминант* уравнения), то уравнение (6.13) в множестве действительных чисел имеет два и только два действительных корня, которые определяются по формулам

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{6.15}$$

Если $b^2-4ac>0$, то $x_1 \neq x_2$, а если $b^2-4ac=0$, то $x_1 \equiv x_2$. Если $b^2-4ac<0$, то уравнение (6.13) действительных решений не имеет.

В частном случае, когда b — четное число, т.е. $b=2k$, уравнение (6.13) принимает вид $ax^2+2kx+c=0$, а формулы (6.15) преобразуются в следующую:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}. \tag{6.16}$$

Если уравнение приведенное, т.е. имеет вид $x^2+px+q=0$, то для определения его корней получим

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \tag{6.17}$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение ax^2+bx+c при $a \neq 0$ называется *квадратным трехчленом.*

Выражение $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом квадратного трехчлена.*

Если $D \geq 0$, то квадратный трехчлен разлагается на множители с действительными коэффициентами:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2), \tag{6.18}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, определяемые по формулам нахождения корней полного квадратного уравнения.

Биквадратные уравнения

Биквадратным уравнением называется целое рациональное алгебраическое уравнение четвертой степени, которое может быть приведено к каноническому виду

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0). \tag{6.19}$$

Заменив x^2 на t, получим $at^2+bt+c=0$, из которого находим

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ t_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если $t_1>0$ и $t_2>0$ ($a>0, c>0, b^2-4ac\geq 0, b<0$ или $a<0$, $c<0, b^2-4ac\geq 0, b>0$), то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения и имеющие вид

$$a\cdot\frac{f_1(x)}{f_2(x)}+b\cdot\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=c, \tag{6.20}$$

решаются с помощью подстановки

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=t. \tag{6.21}$$

Тогда $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=\dfrac{1}{t}$ и относительно t получается уравнение

$$at+b\cdot\frac{1}{t}=c \text{ или } at^2-ct+b=0 \quad (t\neq 0).$$

Теорема Виета

Корни уравнения $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ с его коэффициентами связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Например, для уравнений четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ теорема Виета имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}; \end{cases}$$

для кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}; \end{cases}$$

для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется алгебраическое уравнение, если хотя бы один из членов которого иррационален относительно неизвестного, т.е. это есть уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем: сначала изолируется один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и т.д. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень получается уравнение, в общем случае неравносильное данному; поэтому проверка найденных значений неизвестного по условию исходного уравнения обязательна, т.е. является составной частью решения.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в четную степень n, то корнями полученного уравнения $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ будут все корни исходного уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ и уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

При переходе от уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ к уравнению $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ потери корней не произойдет, но могут появиться посторонние корни, а именно: корни сопряженного с исходным уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в нечетную степень k, то получим уравнение $(f_1(x))^k = (f_2(x))^k$, равносильное исходному в множестве действительных чисел.

При возведении в нечетную степень обеих частей уравнения, рассматриваемого в множестве действительных чисел, посторонние корни не появляются.

Приступая к решению иррационального уравнения, целесообразно предварительно определить ОДЗ, так как может оказаться, что это уравнение не определено в области действительных чисел.

При решении иррациональных уравнений следует иметь в виду, что не принадлежащие к ОДЗ значения неизвестного всегда посторонние для решаемого уравнения; их можно отбросить без проверки по условию. Найденные значения неизвестного из области допустимых обязательно следует проверить по условию уравнения, так как они также могут оказаться посторонними.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Системой n уравнений с m неизвестными называется *n* уравнений, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одной и той же буквой, означают одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы n уравнений с *m* неизвестными называется всякая упорядоченная совокупность из *m* таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, обращают каждое уравнение системы в тождество.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

Если система не имеет решений, то ее называют *несовместной* или *противоречивой*, в противном случае — *совместной*.

Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ может либо иметь единственное решение, либо иметь бесконечно много решений, либо не иметь решений. При графическом способе решения каждому уравнению данной системы ставится в соответствие некоторая прямая на плоскости XOY; таким образом, данной системе на плоскости соответствует пара прямых. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо совпадать, либо не иметь общих точек.

При пересечении прямых данная система имеет единственное решение; при совпадении прямых данная система имеет бесконечно много решений; если прямые не имеют ни одной общей точки, то данная система решений не имеет.

Решить уравнения (**6.256** — **6.302**):

6.256. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16.$

Решение.

Из условия имеем

$$\left((x+3-x-5)^2+2(x+3)(x+5)\right)^2-2(x+3)^2(x+5)^2=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4+2(x+3)(x+5))^2-2(x+3)^2(x+5)^2=16.$$

Пусть $((x+3)(x+5))=y$, тогда уравнение имеет вид

$(4+2y)^2-2y^2=16 \Leftrightarrow 2y^2+16y=0$, откуда $y_1=0, y_2=-8$.

Таким образом:

1) $(x+3)(x+5)=0 \Rightarrow x_1=-3, x_2=-5$ или

2) $(x+3)(x+5)=-8 \Leftrightarrow x^2+8x+23=0. \varnothing (D<0)$

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=-5$.

6.257. $u^3-(2a+1)u^2+(a^2+2a-b^2)u+(b^2-a^2)=0.$

Решение.

Из условия $u^3-2au^2-u^2+a^2u+2au-b^2u+b^2-a^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (u^3-u^2)-(2au^2-2au)+(a^2u-a^2)-(b^2u-b^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u-1)u^2-2a(u-1)u+a^2(u-1)-b^2(u-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u-1)(u^2-2au+a^2-b^2)=0.$$

Отсюда: $u-1=0$ или $u^2-2u+a^2-b^2=0$; $u_1=1$, $u_2=a+b$, $u_3=a-b$.

Ответ: $u_1=1$, $u_2=a+b$, $u_3=a-b$.

6.258. $x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+(a^2-a)=0.$

Решение.

Из условия $x^3-x^2-x^2-a^2x+ax+x+a^2-a=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^3-x^2)-(x^2-x)-(a^2x-a^2)+(ax-a)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x^2-(x-1)x-a^2(x-1)+a(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-a^2+a)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) $x-1=0$ или 2) $x^2-x-a^2+a=0$. Из этих уравнений получаем $x_1=1$, $x_2=1-a$, $x_3=a$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=1-a$, $x_3=a$.

6.259. $x^3-(3a-1)x^2+\left(2a^2-3a\right)x+2a^2=0.$

Решение.

Имеем $x^3-3ax^2+x^2+2a^2x-3ax+2a^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x^3+x^2\right)-\left(3ax^2+3ax\right)+\left(2a^2x+2a^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x+1)-3a(x+1)x+2a^2(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-3ax+2a^2\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $x+1=0$, 2) $x^2-3ax+2a^2=0 \Rightarrow x_1=-1$, $x_2=a$, $x_3=2a$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=a$, $x_3=2a$.

6.260. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

Решение.

Так как $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, то

$(x-1+x+3)\left((x-1)^4-(x-1)^3(x+3)+(x-1)^2(x+3)^2-\right.$

$\left.-(x-1)(x+3)^3+(x+3)^4\right)=242(x+1) \Leftrightarrow (x+1)\times$

$\times\left((x-1)^4+(x+3)^4-(x-1)(x+3)\left((x-1)^2+(x+3)^2\right)+(x-1)^2(x+3)^2\right)-$

$-121(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)\times$

$\times\left(\left((x-1-x-3)^2+2(x-1)(x+3)\right)^2-2(x-1)^2(x+3)^2-(x-1)(x+3)\times\right.$

$\left.\times\left((x-1-x-3)^2+2(x-1)(x+3)\right)+(x-1)^2(x+3)^2-121\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $x+1=0$ или 2) $(16+2(x-1)(x+3))^2-(x-1)^2(x+3)^2-(x-1)\times$

$\times(x+3)(16+2(x-1)(x+3)-121=0$.

Из первого уравнения имеем $x_1=-1$.

2) Пусть $(x-1)(x+3)=y$, тогда второе уравнение принимает вид $(16+2y)^2-y^2-y(16+2y)-121=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+48y+135=0$, $y_1=-45$, $y_2=-3$. Тогда $(x-1)(x+3)=-45$ или $(x-1)(x+3)=-3$; $x_2=0$, $x_3=-2$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-2$.

6.261. $x^3-(2a+1)x^2+\left(a^2+a\right)x-\left(a^2-a\right)=0.$

Решение.

Из условия имеем

$x^3-2ax^2-x^2+a^2x+ax-a^2+a=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-ax^2-ax^2-x^2+a^2x+ax-a^2+a=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x^3-x^2\right)-\left(ax^2-ax\right)-\left(ax^2-a\right)+\left(a^2x-a^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)x^2-a(x-1)x-a(x-1)(x+1)+a^2(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2ax+a^2-a\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $x-1=0$ или 2) $x^2-2ax+a^2-a=0$; откуда $x_1=1$,

$x_2=a-\sqrt{a}$, $x_3=a+\sqrt{a}$.

Ответ: $x_1=1, x_2=a-\sqrt{a}, x_3=a+\sqrt{a}$.

6.262. $\left(x^3+x^{-3}\right)+\left(x^2+x^{-2}\right)+\left(x+x^{-1}\right)=6.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0.$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;$

$$x+\frac{1}{x}=y \Leftrightarrow x^3+3x+\frac{3}{x}=\frac{1}{x^3}=y^3 \Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y.$$

Получаем следующее уравнение

$$y^3-3y+y^2-2+y-6=0 \Leftrightarrow y^3+y^2-2y-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(y^3-8\right)+\left(y^2-2y\right)=0 \Leftrightarrow (y-2)\left(y^2+2y+4\right)+(y-2)y=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-2)\left(y^2+3y+4\right)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) $y-2=0$ или 2) $y^2+3y+4=0$, откуда $y_1=2$; $y^2+3y+4=0$, $\varnothing$.

Таким образом, $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x}=0 \Rightarrow x_{1,2}=1.$

Ответ: $x=1$.

6.263. $(x-2)^6+(x-4)^6=64.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left((x-2)^2\right)^3+\left((x-4)^2\right)^3=64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left((x-2)^2+(x-4)^2\right)\left((x-2)^4-(x-2)^2(x-4)^2+(x-4)^4\right)=64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left((x-2-x+4)^2+2(x-2)(x+4)\right)\times$$
$$\times\left(\left((x-2-x+4)^2+2(x-2)(x-4)\right)^2-2(x-2)^2(x-4)^2-(x-2)^2(x-4)^2\right)=$$
$$=64 \Leftrightarrow (4+2(x-2)(x-4))\left((4+2(x-2)(x-4))^2-3(x-2)^2(x-4)^2\right)=64.$$

Пусть $(x-2)(x-4)=y$, тогда имеем

$(4+2y)\left((4+2y)^2-3y^2\right)-64=0 \Leftrightarrow y\left(y^2+6y+12\right)=0$. Отсюда или $y=0$, или $y^2+6y+12=0$, $\varnothing$.

Таким образом, $(x-2)(x-4)=0$, $x_1=2$, $x_2=4$.

Ответ: $x_1=2, x_2=4$.

6.264. $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$.

Решение.

Если $x^3-x^2=y\neq 0$, то уравнение принимает вид

$$y-\frac{8}{y}-1=0 \Leftrightarrow \frac{y^2-2y-8}{y}=0 \Leftrightarrow y^2-2y-8=0, y_1=-2, y_2=4.$$

Получили:

1) $x^3-x^2=-2$ или 2) $x^3-x^2=4$.

Имеем

$$1)\left(x^3+1\right)-\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+1\right)-(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x+2\right)=0 \Leftrightarrow x_1=-1;$$

$$2)\left(x^3-8\right)-\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)-(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x+2\right)=0, x_2=2.$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=2$.

6.265. $x^3-(2a+1)x^2+\left(a^2+2a-m\right)x-\left(a^2-m\right)=0$.

Решение.

Имеем

$$x^3-2ax^2-x^2+a^2x+2ax-mx-a^2+m=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-x^2\right)-\left(2ax^2-2ax\right)+\left(a^2x-a^2\right)-(mx-m)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x^2-2a(x-1)x+a^2(x-1)-m(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2ax+a^2-m\right)=0,$$

откуда $x-1=0$ или $x^2-2ax+a^2-m=0$.

Решая уравнения, получим $x_1=1, x_2=a-\sqrt{m}, x_3=a+\sqrt{m}$.

Ответ: $x_1=1, x_2=a-\sqrt{m}, x_3=a+\sqrt{m}$.

6.266. $x^3-3ax^2+(3a^2-b)x-(a^3-ab)=0;\ b\geq 0.$

Решение.
Из условия получаем

$x^3-3ax^2+3a^2x-bx-a^3+ab=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^3-a^3)-(3ax^2-3a^2x)-(bx-ab)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-a)(x^2+ax+a^2)-3a(x-a)x-b(x-a)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-a)(x^2-2ax+a^2-b)=0,\ x-a=0$ или

$x^2-2ax+a^2-b=0\Rightarrow x_1=a,\ x_2=a-\sqrt{b},\ x_3=a+\sqrt{b}.$

Ответ: $x_1=a,\ x_2=a-\sqrt{b},\ x_3=a+\sqrt{b}.$

6.267. $x^3-(p^2-p+7)x-3(p^2-p-2)=0.$

Решение.
Перепишем уравнение в виде

$x^3-p^2x+px-7x-3p^2+3p+6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3+27-27-p^2x+px-7x-3p^2+3p+6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x^3+27)-(p^2x+3p^2)+(px+3p)-(7x+21)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+3)(x^2-3x+9)-p^2(x+3)+p(x+3)-7(x+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+3)(x^2-3x-p^2+p+2)=0\Rightarrow x+3=0$ или

$x^2-3x-p^2+p+2=0\Rightarrow x_1=-3,\ x_2=2-p,\ x_3=p+1.$

Ответ: $x_1=-3,\ x_2=2-p,\ x_3=p+1.$

6.268. $z^3-(2p+1)z^2+(p^2+2p-q)z-(p^2-q)=0.$

Решение.
Из условия имеем

$z^3-2pz^2-z^2+p^2z+2pz-qz-p^2+q=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z^3-z^2)-(2pz^2-2pz)+(p^2z-p^2)-(qz-q)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z-1)z^2-2p(z-1)z+p^2(z-1)-q(z-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z-1)(z^2-2pz+p^2-q)=0\Rightarrow z-1=0$ или

$z^2-2pz+p^2-q=0.$ Отсюда $z_1=1,\ z_2=p-\sqrt{q},\ z_3=p+\sqrt{q}.$

Ответ: $z_1=1,\ z_2=p-\sqrt{q},\ z_3=p+\sqrt{q}.$

6.269. $x^3-2ax^2+\left(a^2+2\sqrt{3}a-9\right)x-\left(2a^2\sqrt{3}-12a+6\sqrt{3}\right)=0.$

Решение.

$x^3-2ax^2+\left(a^2+2\sqrt{3}a-9\right)x-\left(2a^2\sqrt{3}-12a+6\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-\left(2a-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)x^2+\left(a^2+2\sqrt{3}a-9\right)x-2\sqrt{3}\left(a^2-2\sqrt{3}a+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-\left(2a-2\sqrt{3}\right)x+a^2-2\sqrt{3}a+3\right)-2\sqrt{3}x^2+$

$+\left(4\sqrt{3}a-12\right)x-2\sqrt{3}\left(a^2-2\sqrt{3}a+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-\left(2a-2\sqrt{3}\right)x+a^2-2\sqrt{3}a+3\right)-2\sqrt{3}\times$

$\times\left(x^2-\left(2a-2\sqrt{3}\right)x+a^2-2\sqrt{3}a+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x^2-\left(2a-2\sqrt{3}\right)x+a^2-2\sqrt{3}a+3\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1)\, x-2\sqrt{3}=0, x_1=2\sqrt{3}$ или

$2)\, x^2-\left(2a-2\sqrt{3}\right)x+\left(a^2-2\sqrt{3}a+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2\left(a-\sqrt{3}\right)x+\left(a-\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\left(a-\sqrt{3}\right)\right)^2=0, x_2=x_3=a-\sqrt{3}.$

Ответ: $x_1=2\sqrt{3},\ x_2=x_3=a-\sqrt{3}.$

6.270. $10x^3-3x^2-2x+1=0.$

Решение.

$10x^3+5x^2-8x^2-4x+2x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2(2x+1)-4x(2x+1)+(2x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+1)\left(5x^2-4x+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0, \\ 5x^2-4x+1=0, \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{2}.$

6.271. $2\left(x^2+x+1\right)^2-7(x-1)^2=13\left(x^3-1\right).$

Решение.

$2\left(x^2+x+1\right)^2-7(x-1)^2=13(x-1)\left(x^2+x+1\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2-7\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2=13\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)$$

Если $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=y$, то уравнение принимает вид

$7y^2+13y-2=0 \Rightarrow y_1=-2,\ y_2=\dfrac{1}{7}$.

Тогда $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=-2$ или $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{7}$. Из этих уравнений получаем $x_1=\dfrac{-1}{2},\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=4$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-1}{2},\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=4$.

6.272. $27x^3+9x^2-48x+20=0$.

Решение.

Из условия имеем $x^3+\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{16}{9}x+\dfrac{20}{27}=0$. Рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\pm\dfrac{2}{3};\pm\dfrac{4}{3};\pm\dfrac{5}{3}$ и т.д. Проверкой убеждаемся, что $x_1=\dfrac{2}{3}$ — корень.

Делим $x^3+\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{16}{9}x+\dfrac{20}{27}$ на $x-\dfrac{2}{3}$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{27} & x-\frac{2}{3} \\
\quad \underline{x^3-\frac{2}{3}x^2} & \overline{x^2+x-\frac{10}{9}} \\
\qquad -\,x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{27} & \\
\qquad\quad \underline{x^2-\frac{2}{3}x} & \\
\qquad\qquad -\,-\frac{10}{9}x+\frac{20}{27} & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\frac{10}{9}x+\frac{20}{27}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

(Деление можно также осуществлять по схеме Горнера.)

Приходим к уравнению $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x^2+x-\frac{10}{9}\right)=0 \Rightarrow x-\frac{2}{3}=0$ или $x^2+x-\frac{10}{9}=0$.

Отсюда имеем $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{5}{3}, x_3=\frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1=x_3=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{5}{3}$.

6.273. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0$.

Решение.

Из условия получаем $x^4-4x^3+\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}=0$.

Рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}$.

Проверкой убеждаемся, что $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$ — корни уравнения.

Делим $x^4-4x^3+\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}$ на $x-\frac{1}{2}$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^4-4x^3+\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4} & x-\frac{1}{2} \\
\cline{2-2}
\underline{x^4-\frac{1}{2}x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3-\frac{7}{2}x^2-x+\frac{1}{2}. \\
-\ -\frac{7}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2 \qquad\quad & \\
\underline{-\frac{7}{2}x^3+\frac{7}{4}x^2} \qquad\quad & \\
-\ -x^2+x \qquad & \\
\underline{-x^2+\frac{1}{2}x} \qquad & \\
-\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} & \\
\underline{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Приходим к уравнению $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^3-\frac{7}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)=0.$

Делим $x^3-\frac{7}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ на $x+\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{l|l}
\;\;x^3-\frac{7}{2}x^2-x+\frac{1}{2} & x+\frac{1}{2} \\
-\underline{x^3+\frac{1}{2}x^2} & \overline{x^2-4x+1.} \\
\qquad -4x^2-x & \\
\qquad -\underline{4x^2-2x} & \\
\qquad\qquad x+\frac{1}{2} & \\
\qquad\qquad -\underline{x+\frac{1}{2}} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

(Деление можно также производить по схеме Горнера.)

Уравнение принимает вид

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-4x+1\right)=0 \Rightarrow x-\frac{1}{2}=0, x+\frac{1}{2}=0 \text{ или } x^2-4x+1=0,$$

откуда имеем $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}, x_3=2-\sqrt{3}, x_4=2+\sqrt{3}.$

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}, x_3=2-\sqrt{3}, x_4=2+\sqrt{3}.$

6.274. $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq-9$.

Перепишем уравнение в виде

$$(x)^2+\left(\frac{9x}{9+x}\right)^2-40=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{9x}{9+x}-40=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2+18\left(\frac{x^2}{9+x}\right)-40=0.$$

Если $\frac{x^2}{9+x}=y$, то имеем квадратное уравнение $y^2+18y-40=0\Rightarrow$ $\Rightarrow y_1=-20,\ y_2=2$. Тогда $\frac{x^2}{9+x}=-20, \varnothing$; или $\frac{x^2}{9+x}=2$. Из второго уравнения получаем $x_1=1-\sqrt{19}, x_2=1+\sqrt{19}$.

Ответ: $x_1=1-\sqrt{19}, x_2=1+\sqrt{19}$.

6.275. $\frac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1+x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ x\ne 2. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x}=y\ge 0$, тогда уравнение принимает вид

$$\frac{2+y^2}{2-y^2}+y=1+y^2 \Leftrightarrow y^4-y^3+2y=0\left(y\ne\pm\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow y\left(y^3-y^2+2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\left(y^3+1-y^2+1\right)=0\Leftrightarrow y\left((y+1)\left(y^2-y+1\right)-(y-1)(y+1)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(y+1)\left(y^2-2y+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=-1, \varnothing, \\ y^2-2y+2=0, \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow y=\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $x=0$.

6.276. $\frac{20}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}+x=22.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Пусть $\sqrt{x}=y>0$, тогда уравнение принимает вид

$$\frac{20}{y}+y^3+y^2-22=0\Leftrightarrow y^4+y^3-22y+20=0.$$

Целые корни уравнения находятся среди чисел $\pm1; \pm2; \pm4; \pm5;$ $\pm10; \pm20$. Проверкой убеждаемся, что $y_1=1,\ y_2=2$.

Делим $y^4 + y^3 - 22y + 20$ на $y - 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
y^4+y^3-22y+20 & y-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{y^4-y^3} & y^3+2y^2+2y-20. \\
2y^3 & \\
-\underline{2y^3-2y^2} & \\
2y^2-22y & \\
-\underline{2y^2-2y} & \\
-20y+20 & \\
-\underline{-20y+20} & \\
0 &
\end{array}
$$

(Деление можно также производить по схеме Горнера.)

Делим $y^3 + 2y^2 + 2y - 20$ на $y - 2$:

$$
\begin{array}{r|l}
y^3+2y^2+2y-20 & y-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{y^3-2y^2} & y^2+4y+10. \\
4y^2+2y & \\
-\underline{4y^2-8y} & \\
10y-20 & \\
-\underline{10y-20} & \\
0 &
\end{array}
$$

Получаем уравнение $(y-1)(y-2)(y^2+4y+10)=0$, равносильное трем уравнениям:

$y - 1 = 0$, $y - 2 = 0$ или $y^2 + 4y + 10 = 0$, $\varnothing$. Отсюда $\sqrt{x}=1$ или $\sqrt{x}=2$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

6.277. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x\ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$

Пусть $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=y\ge 0 \Rightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(x+3)}+x+3=y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x+3)}=y^2-2x-2.$

Из исходного уравнения имеем $y+y^2-2x-2=4-2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+y-6=0$, откуда $y_1=-6$, $y_2=4$; $y_1=-6$ не подходит. Если $y=4$, то получаем $2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x-2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-3}=1-x$, где $1-x\geq 0, x\leq 1$. Возведя обе части уравнения в квадрат, находим $x^2+2x-3=1-2x+x^2$, откуда $4x=4$, $x=1$.

Ответ: $x=1$.

6.278. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}2x+3\geq 0,\\ x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -\dfrac{3}{2},\\ x\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq -1.$

Если $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=y\geq 0$, то $2x+3+2\sqrt{2x^2+5x+3}+x+1=y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3}=y^2-3x-4.$

Из исходного уравнения имеем $y=3x+y^2-3x-4-16\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y^2-y-20=0$, откуда $y_1=-4$, $y_2=5$; $y_1=-4$ не подходит, так как $y\geq 0$.

Таким образом, $2\sqrt{2x^2+5x+3}=25-3x-4\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3}=$ $=21-3x$, где $21-3x\geq 0$, $x\leq 7$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $8x^2+20x+12=$ $=441-126x+9x^2\Leftrightarrow x^2-146x+429=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=143$; $x_2=143$ — посторонний корень.

Ответ: $x=3$.

6.279. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+8\geq 0,\\ x-8\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 8.$

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{x+8}=y,\\ \sqrt[4]{x-8}=z,\end{cases}(y,z\geq 0)\begin{cases}x+8=y^4,\\ x-8=z^4.\end{cases}$

Приходим к системе

$$\begin{cases} y-z=2, \\ y^4-z^4=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=2, \\ (y^2-z^2)(y^2+z^2)=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=2, \\ (y-z)(y+z)((y-z)^2+2yz)=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=2, \\ 2(y+z)(4+2yz)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2+z, \\ (y+z)(2+yz)=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+z+z)(2+(2+z)z)=4 \Leftrightarrow z(z^2+3z+4)=0.$$

Отсюда $z=0$ или $z^2+3z+4=0$, $\varnothing$.

Тогда $y=2+0=2$; $x=y^4-8=16-8=8$.

Ответ: $x=8$.

6.280. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ x+1\ge 0, \\ x+4\ge 0, \\ x+9\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x+2\sqrt{x(x+9)}+x+9=$$

$$=x+1+2\sqrt{(x+1)(x+4)}+x+4 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+9)}+2=\sqrt{(x+1)(x+4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x+4\sqrt{x^2+9x}+4=x^2+5x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+9x}=-4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x\ge 0,\ x\le 0.$$

Отсюда, учитывая ОДЗ, получаем $x=0$.

Ответ: $x=0$.

6.281. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}.$

Решение.

Возведя обе части уравнения в куб, имеем

$$x+5+3\sqrt[3]{(x+5)^2(x+6)}+3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)^2}+x+6=2x+11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)}=0 \Leftrightarrow (x+5)(x+6)(2x+11)=0,$$

откуда $x_1=-5, x_2=-6, x_3=-\dfrac{11}{2}$.

Ответ: $x_1=-5, x_2=-6, x_3=-\dfrac{11}{2}$.

6.282. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$ (ограничиться отысканием положительных корней).

ОДЗ: $\begin{cases} u^2-u-1\ge 0, \\ u^2+u+3\ge 0, \\ 2u^2+8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow u\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$u^2-u-1+2\sqrt{(u^2-u-1)(u^2+u+3)}+u^2+u+3=2u^2+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(u^2-u-1)(u^2+u+3)}=3 \Leftrightarrow (u^2-u-1)(u^2+u+3)=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^4+u^2-4u-12=0 \Leftrightarrow u^4-8u+u^2+4u-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(u-2)(u^2+2u+4)+(u-2)(u+6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u-2)(u^3+2u^2+5u+6)=0 \Leftrightarrow u=2\ (\text{при } u>0).$$

Ответ: $u=2$.

6.283. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{x\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt[5]{x^3}-1\ne 0, \\ \sqrt[5]{x}-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ne 1.$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sqrt[5]{x^6}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)\left(\sqrt[5]{x^3}+1\right)}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{\sqrt[5]{x}-1}=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3}+1+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1=16 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}-14=0.$$

Пусть $\sqrt[5]{x}=y$, тогда получаем уравнение

$$y^3+y^2+y-14=0 \Leftrightarrow (y^3-8)+(y^2-4)+(y-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+4)+(y-2)(y+2)+(y-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+3y+7)=0.$$

Отсюда $y-2=0$ или $y^2+3y+7=0$, $\varnothing$.

Тогда $\sqrt[5]{x}=2, x=32.$

Ответ: $x=32.$

6.284. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}18+5x\ge 0,\\ 64-5x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{18}{5}\le x\le \dfrac{64}{5}.$

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{18+5x}=y,\\ \sqrt[4]{64-5x}=z,\end{cases} (y,z\ge 0) \begin{cases}18+5x=y^4,\\ 64-5x=z^4.\end{cases}$

Приходим к следующей системе:

$$\begin{cases}y+z=4,\\ y^4+z^4=82\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+z=4,\\ \left((y+z)^2-2yz\right)^2-2y^2z^2=82\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (16-2yz)^2-2y^2z^2=82 \Leftrightarrow y^2z^2-32yz+87=0,$$

$yz=3$ или $yz=29$.

Получаем совокупность двух систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y+z=4,\\ yz=3;\end{cases}\\ \begin{cases}y+z=4,\\ yz=29, \varnothing.\end{cases}\end{array}\right.$$

Из первой системы получаем:

$$\begin{cases}y_1=1,\\ z_1=3;\end{cases} \begin{cases}y_2=3,\\ z_2=1.\end{cases}$$

Так как $x=\dfrac{y^4-18}{5}$, то $x_1=\dfrac{1-18}{5}=-\dfrac{17}{5}, x_2=\dfrac{81-18}{5}=\dfrac{63}{5}.$

Ответ: $x_1=-\dfrac{17}{5}, x_2=\dfrac{63}{5}.$

6.285. $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\dfrac{4}{3}x+2.$

Решение.

ОДЗ: $5x+4>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{5}.$

Возведем обе части исходного уравнения в квадрат, учитывая, что $\dfrac{4}{3}x+2\ge 0.$ Имеем:

$$\frac{x^4}{5x+4}+5x+4+2x^2=\frac{4}{9}(2x+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^4}{5x+4}+2x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ \dfrac{9x^3}{5x+4}+(2x-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ 9x^3+10x^2-7x-12=0. \end{array}\right.$$

Подбором убеждаемся, что $x_2=1$ — корень кубического уравнения. Делим его левую часть на $(x-1)$:

$$\begin{array}{r|l} 9x^3+10x^2-7x-12 & x-1 \\ \underline{9x^3-9x^2} \qquad\qquad\quad & 9x^2+19x+12. \\ 19x^2-7x \qquad & \\ \underline{19x^2-19x} \qquad & \\ 12x-12 & \\ \underline{12x-12} & \\ 0 & \end{array}$$

Получим $9x^2+19x+12\ne 0$, так как $D<0$.
Ответ: $x_1=0,\ x_2=1.$

6.286. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^3+x^2-1\ge 0, \\ x^3+x^2+2\ge 0. \end{cases}$

Пусть $y=\sqrt{x^3+x^2-1},\quad z=\sqrt{x^3+x^2+2}$, тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y+z=3, \\ y^2-z^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=3, \\ z-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2+2x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)+2(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x+2\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0, \quad x^2+2x+2 \neq 0,$$

так как $D < 0$.

Ответ: $x = 1$.

6.287. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перепишем уравнение в виде $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ и возьмем

$\sqrt[6]{x}=y>0$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$\dfrac{1}{y^3+y^2}+\dfrac{1}{y^3-y^2}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y^4-y^2-6y=0, 0<y \neq 1$. Далее

$$y\left(y^3-y-6\right)=0 \Leftrightarrow y\left(\left(y^3-8\right)-(y-2)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\left((y-2)\left(y^2+2y+4\right)-(y-2)\right)=0 \Leftrightarrow y(y-2)\left(y^2+2y+3\right)=0.$$

Отсюда или $y = 0$, или $y - 2 = 0$, или $y^2 + 2y + 3 = 0$, $\varnothing$ ($D < 0$).

Так как $y > 0$, то окончательно имеем $\sqrt[6]{x}=2, x=64$.

Ответ: $x=64$.

6.288. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Из условия имеем

$$x^2+\left(\sqrt{2x+15}\right)^2=2x\sqrt{2x+15} \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{2x+15}+\left(\sqrt{2x+15}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x+15}\right)^2=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{2x+15}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2x+15}, (x>0) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2=2x+15 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0$, откуда $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

6.289. $x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$x^{\frac{4}{5}}-\frac{7}{x^{\frac{2}{5}}}+\frac{6}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x^{\frac{9}{5}}-7x^{\frac{3}{5}}+6}{x}=0\Leftrightarrow x^{\frac{9}{5}}-7x^{\frac{3}{5}}+6=0, x\neq 0.$$

Если $x^{\frac{3}{5}}=y$, то получаем

$$y^3-7y+6=0\Leftrightarrow y^3-1-7y+7=0\Leftrightarrow(y-1)(y^2+y+1)-7(y-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y-1)(y^2+y-6)=0\Leftrightarrow(y-1)(y+3)(y-2)=0,\text{ откуда}$$

$$y_1=1, y_2=-3, y_3=2\Rightarrow x_1^{\frac{3}{5}}=1; x_2^{\frac{3}{5}}=-3; x_3^{\frac{3}{5}}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=1, x_2=-(3)^{\frac{5}{3}}, x_3=2^{\frac{5}{3}}.$$

Ответ: $x_1=1, x_2=-3\sqrt[3]{9}, x_3=2\sqrt[3]{4}$.

6.290. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=x-1.$$

ОДЗ: $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Тогда имеем $\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=x-1$ и получаем два случая:

$$1)\begin{cases}\sqrt{x-1}-1<0,\\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2,\\ x=3,\varnothing;\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}\sqrt{x-1}-1\geq 0,\\ \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}\geq 1,\\ 2\sqrt{x-1}-(x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 1, \\ \sqrt{x-1}\left(2-\sqrt{x-1}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 1, \\ x-1=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\ge 1, \\ x-1=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x=5.$$

Ответ: $x=5$.

6.291. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{8{,}4}{x^{\frac{7}{12}}}-\frac{0{,}2}{x^{\frac{1}{12}}}-x^{\frac{11}{12}}=0 \Leftrightarrow \frac{8{,}4-0{,}2x^{\frac{6}{12}}-x^{\frac{18}{12}}}{x^{\frac{7}{12}}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8{,}4-0{,}2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}=0\ (x\ne 0) \Leftrightarrow 5x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-42=0.$$

Если $x^{\frac{1}{2}}=y>0$, то имеем уравнение

$$5y^3+y-42=0 \Leftrightarrow 5y^3-40+y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(y^3-8\right)+(y-2)=0 \Leftrightarrow 5(y-2)\left(y^2+2y+4\right)+(y-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(5y^2+10y+21\right)=0.$$

Отсюда получим $y-2=0$ $(5y^2+10y+21\ne 0$, так как $D<0)$. Тогда $x^{\frac{1}{2}}=2$, $x=4$.

Ответ: $x=4$.

6.292. $\sqrt{x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2+8x+6\ge 0, \\ x^2-1\ge 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{2(x+3)(x+1)}+\sqrt{(x-1)(x+1)}-2(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0, x_1=1;\\ \sqrt{2(x+3)}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}.\end{array}\right.$$

Из второго уравнения, после возведения в квадрат, получаем:

$$2(x+3)+2\sqrt{2(x+3)(x-1)}=4(x+1),\ \text{при } x\ge 1, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2(x+3)(x-1)}=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ 2\sqrt{2(x+3)}=\sqrt{x-1},\ x>1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=1,\\ 8(x+3)=x-1,\ x>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_2=1,\\ \varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=1$.

6.293. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\ne 0,\\ x\ne-\sqrt{2}.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{x\sqrt[7]{x^3}}{2\sqrt[7]{x+\sqrt{2}}} \Leftrightarrow x^2\cdot\sqrt[7]{x^2-2}-2\sqrt[7]{x^2-2}=x^3\cdot\sqrt[7]{x^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[7]{x^2-2}\left(x^2-2\right)=x^3\cdot\sqrt[7]{x^3} \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^{\frac{8}{7}}=x^{\frac{24}{7}} \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^8=x^{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2=\pm\left(x^3\right).$$

Отсюда:

1) $x^3-x^2+2=0 \Leftrightarrow x^3+1-\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+1-x+1\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x+2\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0,$

так как $x^2-2x+2\ne 0, D<0. x_1=-1;$

2) $x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow \left(x^3-1\right)+\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1+x+1\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x+2\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0,$

так как $x^2+2x+2\ne 0, D<0. x_2=1.$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=1$.

6.294. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$

Решение.

Пусть $y=\sqrt[3]{2-x}, z=\sqrt[3]{7+x}$, тогда имеем систему

$$\begin{cases} y^2+z^2-yz=3, \\ y^3+z^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2-yz=3, \\ (y+z)(y^2+z^2-yz)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+z)^2-3yz=3, \\ y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz=2, \\ y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2, \\ z=1; \end{cases} \\ \begin{cases} y=1, \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-6,\ x_2=1.$

6.295. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $5x^{\frac{6}{15}}+3x^{\frac{4}{15}}-8=0$ и возьмем $x^{\frac{2}{15}}=y$.

Получаем $5y^3+3y^2-8=0 \Leftrightarrow (5y^3-5)+(3y^2-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(y-1)(y^2+y+1)+3(y-1)(y+1)=0 \Leftrightarrow (y-1)(5y^2+8y+8)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y-1=0,\ 5y^2+8y+8\neq 0,$

так как $D<0$. Таким образом, $y=1$, т.е. $x^{\frac{2}{15}}=1 \Leftrightarrow x^2=1, x_1=1, x_2=-1.$

Ответ: $x_1=1, x_2=-1.$

6.296. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

Решение.

ОДЗ:

$\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{34-x}\neq\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow 34-x\neq x+1 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{33}{2}.$

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{\sqrt[3]{(34-x)(x+1)}\left(\sqrt[3]{(34-x)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{(34-x)(x+1)}\left(\sqrt[3]{(34-x)}-\sqrt[3]{(x+1)}\right)\left(\sqrt[3]{(34-x)}+\sqrt[3]{(x+1)}\right)}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(34-x)(x+1)}\left(\sqrt[3]{34-x)}+\sqrt[3]{x+1}\right)=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (34-x)(x+1)(34-x+3\sqrt[3]{(34-x)^2(x+1)}+3\sqrt[3]{(34-x)(x+1)^2}+x+1$$

$$=27000 \Leftrightarrow (34-x)(x+1)(35+3\sqrt[3]{(34-x)(x+1)}(\sqrt[3]{34-x}+\sqrt[3]{x+1}))=$$

$$=27000 \Leftrightarrow 125(34-x)(x+1)=27000 \Leftrightarrow x^2-33x+182=0,\ x_1=7,\ x_2=26.$$

Ответ: $x_1=7,\ x_2=26$.

6.297. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\dfrac{x+5}{x-30}\geq 0, \\ x-30\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -5]\cup(30;\ \infty).$

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{(x-30)(x+5)}=3\sqrt{\frac{x+5}{x-30}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-19x+204}=\sqrt{(x-30)(x+5)}+3\sqrt{\frac{x+5}{x-30}}.$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат будем иметь

$$x^2-19x+204=x^2-25x-150+6\sqrt{(x+5)^2}+\frac{9(x+5)}{x-30},$$

$$2x+118=\frac{3x+15}{x-30}+2|x+5|.$$

Таким образом, имеем две системы:

1) $\begin{cases}x+5<0, \\ 4x^2+5x-3855=0;\ x=\dfrac{-5-\sqrt{61705}}{8}.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x+5\geq 0, \\ 35x=1085;\ x=31.\end{cases}$

Ответ: $x_1=31;\ x_2=\dfrac{-5-\sqrt{61705}}{8}$.

6.298. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}.$

Решение.

Из условия имеем

$$\frac{\left(\left(\sqrt[3]{(15-x)}+\sqrt[3]{(x-6)}\right)^2-\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}\right)^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\frac{49}{3}.$$

Если $\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}=y,$ то, возведя обе части в куб, имеем

$$15-x+3\sqrt[3]{(15-x)^2(x-6)}+3\sqrt[3]{(15-x)(x-6)^2}+x-6=y^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}\left(\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}\right)=y^3-9 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}\cdot y=$$

$$=y^3-9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(15-x)(x-6)}=\frac{y^3-9}{3y} \Rightarrow \frac{\left(y^2-\dfrac{y^3-9}{3y}\right)^2}{y}=\frac{49}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^6-111y^3+81=0.$$

Отсюда $y^3=\dfrac{3}{4}$ или $y^3=27.$ Получаем два случая:

1) $(15-x)(x-6)=\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}-9\right)^3}{27\cdot\dfrac{3}{4}} \Leftrightarrow 48x^2-1008x+2989=0,$ откуда

$$x_1=\frac{126-7\sqrt{141}}{12}=\frac{21}{2}-\frac{7}{12}\sqrt{141},\ x_2=\frac{126+7\sqrt{141}}{12}=\frac{21}{2}+\frac{7}{12}\sqrt{141};$$

2) $(15-x)(x-6)=\dfrac{(27-9)^3}{27\cdot 27} \Leftrightarrow x^2-21x+98=0,$ откуда $x_3=7,\ x_4=14.$

Ответ: $x_1=\dfrac{21}{2}-\dfrac{7}{12}\sqrt{141}, x_2=\dfrac{21}{2}+\dfrac{7}{12}\sqrt{141}, x_3=7, x_4=14.$

6.299. $\frac{2}{19}\left(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32}\right)=\sqrt{\frac{21+x}{16+x}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+37x+336\ge 0, \\ x^2+18x+32\ge 0, \\ \frac{21+x}{16+x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-21]\cup(-16;+\infty].$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{19}\sqrt{(x+21)(x+16)}-\sqrt{\frac{x+21}{x+16}}=\frac{2}{19}\sqrt{x^2+18x+32}.$$

Отсюда $\frac{4}{361}\left(x^2+37x+336\right)-\frac{4}{19}|x+21|+\frac{x+21}{x+16}=\frac{4}{361}\left(x^2+18x+32\right).$

Раскрывая модуль, получаем два случая:

$$1)\begin{cases} x+21<0, \\ \frac{4}{361}x^2+\frac{148}{361}x+\frac{1344}{361}+\frac{4}{19}x+\frac{84}{19}+\frac{x+21}{x+16}=\frac{4}{361}x^2+\frac{72}{361}x+\frac{128}{361} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x<-21, \\ 152x^2+5605x+52573=0, \varnothing; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x+21\ge 0, \\ \frac{4}{361}x^2+\frac{148}{361}x+\frac{1344}{361}-\frac{4}{19}x-\frac{84}{19}+\frac{x+21}{x+16}=\frac{4}{361}x^2+\frac{72}{361}x+\frac{128}{361} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -21, \\ x=79. \end{cases}$$

Ответ: $x = 79$.

6.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\ge 0, \\ 4-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 4.$

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{(x-3)+1}+\sqrt{1-(x-3)}=\left(x^2-6x+9\right)+2.$$

Если $y = x - 3$, то получаем уравнение

$$\sqrt{y+1}+\sqrt{1-y}=y^2+2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-y^2}=y^4+4y^2+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^4+4y^2+2\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)=0, \text{ где } -1 \le y \le 1.$$

Сумма неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда все они нули. Следовательно, имеем $y = 0$, $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

6.301. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

Решение.

ОДЗ: $(x-2)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;2]\cup[3;\infty)$.

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$6\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}+1=5\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}} \Leftrightarrow 6\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}-5\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}+1=0.$$

Если $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}=y\ge 0$, то уравнение принимает вид $6y^2 - 5y + 1 = 0$, откуда $y_1=\frac{1}{2}, y_2=\frac{1}{3}$.

Тогда $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}=\frac{1}{2}$ или $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}=\frac{1}{3}, x_1=\frac{190}{63}, x_2=\frac{2185}{728}$.

Ответ: $x_1=\frac{190}{63}, x_2=\frac{2185}{728}$.

6.302. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $x^3+x-2+\sqrt[3]{x^3+x-2}-10=0$.

Если $t=\sqrt[3]{x^3+x-2}$, то получаем уравнение:

$t^3+t-10=0 \Leftrightarrow t^3-8+t-2=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+4+1)=0 \Leftrightarrow t-2=0$, так как $t^2 + 2t + 5 \ne 0$, $D < 0$. Так как $t = 2$, то $x^3 + x - 2 = 8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (см. выше).

Ответ: $x = 2$.

Решить системы уравнений (**6.303** — **6.341**):

6.303. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=16,\\(x-y)(x^2+y^2)=40.\end{cases}$

Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{cases}x^3+x^2y-xy^2-y^3=16,\\x^3-x^2y+xy^2-y^3=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-2y^3=56,\\2x^2y-2xy^2=-24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=28,\\(x-y)xy=-12\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)((x-y)^2+3xy)=28,\\(x-y)xy=-12.\end{cases}$$

Пусть $\begin{cases}x-y=t,\\xy=z,\end{cases}$ тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}t(t^2+3z)=28,\\tz=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t(t^2+3z)=28,\\z=\dfrac{12}{t}\end{cases}\Rightarrow t^3=64, t=4.$$

Тогда $z=-\dfrac{12}{4}=-3$. Получили $\begin{cases}x-y=4,\\xy=-3,\end{cases}$ откуда

$\begin{cases}x_1=3,\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-3.\end{cases}$

Ответ: (3; – 1), (1; –3).

6.304. $\begin{cases}\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\\dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\-\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}y\neq -z,\\x\neq -z,\\x\neq -y.\end{cases}$

Сложив первое уравнение системы со вторым, а второе с третьим, получим $\frac{a+b}{x+y}=1$ и $\frac{c+a}{z+x}=1$. Подставив найденные значения $\frac{a+b}{x+y}$ и $\frac{c+a}{z+x}$ в первое уравнение системы, найдем $\frac{b+c}{y+z}=1$.

После этого система принимает вид

$$\begin{cases}\frac{a+b}{x+y}=1,\\ \frac{b+c}{y+z}=1,\\ \frac{c+a}{z+x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=a+b,\\ y+z=b+c,\\ z+x=c+a\end{cases} \Rightarrow x=a+b-y.$$

Подставив это значение x в третье уравнение системы, находим $z+a+b-y=c+a$, $z=c-b+y$. Подставив значение z во второе уравнение системы, получим $y=b$.

Тогда $z=c-b+b=c$; $x=a+b-b=a$.

Ответ: $(a; b; c)$.

6.305. $\begin{cases}uvx^2=8,\\ vx^2w=24,\\ x^2wu=12,\\ u+v+w=x+4\end{cases}$

(ограничиться отысканием положительных решений).

Решение.

Разделив первое уравнение системы на второе, найдем $u=\frac{w}{3}$; разделив первое уравнение системы на третье, получим $v=\frac{2w}{3}$.

Подставив найденные значения u и v во второе и четвертое уравнения системы, имеем:

$$\begin{cases}w^2x^2=36,\\ \frac{w}{3}+\frac{2w}{3}+w=x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}wx=\pm 6,\\ x=2w-4\end{cases} \Rightarrow w_1=-1, w_2=3; \quad x_1=-6, x_2=2.$$

Тогда $u_1 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, u_2 = 1; v_1 = \frac{2\cdot(-1)}{3} = -\frac{2}{3}, v_2 = \frac{2\cdot 3}{3} = 2.$

Ответ: $x = 2$, $u = 1$, $v = 2$, $w = 3$.

6.306. $\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 3x + 2y + z = 0, \\ 3(x+2)^3 + 2(y+1)^3 + (z+1)^3 = 27. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения вычтем первое:

$x + y = 0 \Rightarrow x + z = 0,$

$3(x+2)^3 + 2(1-x)^3 + (1-x)^3 = 27 \Leftrightarrow x(x+1) = 0, x_1 = 0, x_2 = -1.$

Тогда $y_1 = z_1 = 0$, $y_2 = z_2 = 1$.

Ответ: (0; 0; 0), (–1, 1, 1).

6.307. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3, \\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ z \neq 0. \end{cases}$

Сложив первое уравнение системы со вторым, получим

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = 6.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{y}{z}} - \sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{x}{z}} - \sqrt{\frac{z}{x}}\right)^2 + 2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{y}{z}} - \sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{z}} - \sqrt{\frac{z}{x}}\right)^2 = 0.$$

Это равенство возможно только тогда, когда $x = y = z$. Из третьего уравнения данной системы имеем $3x = 3$, $x = 1$, тогда $y = 1$; $z = 1$.

Ответ: (1; 1; 1).

6.308. $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы $xy = 8 - yz$, затем из третьего уравнения получим $zx + 8 - yz = 5 \Leftrightarrow zx - yz = -3$. Сложив полученное уравнение со вторым уравнением системы, а затем вычтя его из второго уравнения, будем иметь $zx = 3$ и $yz = 6$. Система принимает вид

$$\begin{cases} xy = 2, \\ yz = 6, \\ zx = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2, \\ z_2 = -3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3), (– 1; –2; – 3).

6.309. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x + y = 2 - z, \\ (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 6, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) + z^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 - z, \\ (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 6, \\ (x + y)((x + y)^2 - 2xy) + z^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - z)^2 - 2xy + z^2 = 6, \\ (2 - z)((2 - z)^2 - 3xy) + z^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = z^2 - 2z - 1, \\ (2 - z)((2 - z)^2 - 3xy) + z^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - z)((2 - z)^2 - 3z^2 + 6z + 3) + z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2(z - 2) - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z - 1)(z + 1) = 0.$$

Отсюда $z_1 = 2$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$. Получили три случая:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = -1, \\ z = 2; \end{cases} \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2, \\ z = 1; \end{cases} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Рассмотрев их, имеем:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -1, \\ z_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2, \\ z_3 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = 1, \\ z_3 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = 2, \\ z_4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 2, \\ y_5 = 1, \\ z_5 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_6 = 2, \\ y_6 = -1, \\ z_6 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; – 1; 2), (1; 2; –1), (–1; 1; 2), (–1; 2; 1), (2; 1; –1), (2; –1; 1).

6.310. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} x^2 + y^2 = t, \\ 2xy = z, \end{cases}$ тогда имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} + z = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{z} + t = \dfrac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5tz = 21t - 5, \\ 4tz = 21z - 4 \end{cases} \Rightarrow 5z^2 - 21z + 4 = 0,$$

откуда $z_1 = 4, z_2 = \dfrac{1}{5}; \quad t_1 = 5, t_2 = \dfrac{1}{4}.$

Таким образом,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4, \\ z = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \\ 2xy = \dfrac{1}{5}, \\ z = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Рассмотрев эти системы уравнений, найдем

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}, \\ y_5 = \dfrac{\sqrt{5}}{10}; \end{cases} \begin{cases} x_6 = \dfrac{\sqrt{5}}{10}, \\ y_6 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \\ y_7 = -\dfrac{\sqrt{5}}{10}; \end{cases} \begin{cases} x_8 = -\dfrac{\sqrt{5}}{10}, \\ y_8 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$, $(1;2)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5};\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{10};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5};-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{10};-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

6.311. $\begin{cases} 10\left(x^4+y^4\right) = -17\left(x^3y+xy^3\right), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 10\left(\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2\right) = -17xy\left(x^2+y^2\right), \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\left(25-2x^2y^2\right) = -84xy, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow 4x^2y^2-17xy-50=0,$$

$xy=\dfrac{25}{4}$ или $xy=-2$.

Из второго уравнения системы получаем:

$(x+y)^2-2xy=5 \Leftrightarrow (x+y)^2=5+2xy.$

Таким образом, приходим к следующим двум системам:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+y)^2=5+2xy, \\ xy=\dfrac{25}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} (x+y)^2=5+2xy, \\ xy=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая эти две системы, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Ответ: (2; –1), (–1; 2), (–2; 1), (1; –2).

6.312. $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{cases} x + z = 6 + y, \\ (x+z)^2 - 2xz + y^2 = 14, \\ (x+z)\left((x+z)^2 - 3xz\right) - y^3 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 6 + y, \\ (6+y)^2 - 2xz + y^2 = 14, \\ (6+y)\left((6+y)^2 - 3xz\right) - y^3 = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xz = y^2 + 6y + 11, (6+y)\left((6+y)^2 - 3\left(y^2 + 6y + 11\right)\right) - y^3 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 11y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(y^3 + 1\right) + \left(6y^2 + 6y\right) + (5y + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(y^2 - y + 1\right) + 6y(y+1) + 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow (y+1)\left(y^2 + 5y + 6\right) = 0,$$

откуда $y_1 = -3$, $y_2 = -2$, $y_3 = -1$.

Приходим к следующим трем системам:

$$\begin{cases} x + z = 3, \\ xz = 2, \\ y = -3; \end{cases} \begin{cases} x + z = 4, \\ xz = 3, \\ y = -2; \end{cases} \begin{cases} x + z = 5, \\ xz = 6, \\ y = -1. \end{cases}$$

Решая полученные три системы, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -2, \\ z_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -3, \\ z_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1, \\ z_3 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = -3, \\ z_4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 3, \\ y_5 = -1, \\ z_5 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_6 = 3, \\ y_6 = -2, \\ z_6 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; –2; 3), (1; –3; 2), (2; –1; 3), (2; –3; 1), (3; –1; 2), (3; –2; 1).

6.313. $\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y) = 60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x) = 105. \end{cases}$

Решение.

Разделив второе уравнение на первое, находим:

$$\frac{(y+2x)(y+3x)}{(x+2y)(x+3y)}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow 38y^2+15xy-17x^2=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно y, получаем

$$y_{1,2}=\frac{-15x\pm\sqrt{225x^2+2584x^2}}{76}=\frac{-15x\pm 53x}{76};$$

$$y_1=-\frac{17}{19}x, y_2=\frac{x}{2}.$$

Из первого уравнения системы имеем $x_1=\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}, x_2=2.$

Тогда $y_1=-\frac{17}{19}\cdot\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}=-\frac{17\sqrt[3]{4}}{4}, y_2=\frac{2}{2}=1.$

Ответ: $\left(\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}; -\frac{17\sqrt[3]{4}}{4}\right)$, $(2; 1)$.

6.314. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1{,}5, \\ xyz=8. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0, \\ z\neq 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x=6-y-z, \\ yz+xz+xy=1{,}5xyz, \\ xyz=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y-z, \\ yz+xz+xy=12, \\ xyz=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y-z, \\ yz+(y+z)(6-y-z)=12, \\ (6-y-z)yz=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y-z, \\ y^2+(z-6)y+z^2-6z+12=0, \\ (6-y-z)yz=8. \end{cases}$$

Решая второе уравнение последней системы уравнений как квадратное относительно y, находим

$$y_{1,2}=\frac{6-z\pm\sqrt{-3(z-2)^2}}{2}.$$

$$D=-3(z-2)^2\geq 0\Leftrightarrow (z-2)^2\leq 0\Leftrightarrow (z-2)^2=0, z-2=0, z=2; y=2; x=2.$$

Ответ: (2; 2; 2).

6.315. $\begin{cases}x^3+y^3=2,\\ 2xy^2-x^2y=1\end{cases}$

(ограничиться отысканием целочисленных решений).

Решение.

Если $y=tx$, то система принимает вид

$$\begin{cases}x^3+t^3x^3=2,\\ 2x^3t^2-x^3t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3\left(1+t^3\right)=2,\\ x^3\left(2t^2-t\right)=1\end{cases}\Rightarrow\frac{t^3+1}{2t^2-t}=2\Leftrightarrow t^3+1=4t^2-2t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^3+1-4t^2+2t=0\Leftrightarrow t^3-3t^2+3t-1-t^2-t+1+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^3-\left(t^2-1\right)-(t-1)=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-2t+1-t-1-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-3t-1\right)=0.$$

По условию x, y — целые, а значит, $t=\dfrac{y}{x}$ — число рациональное.

Корни уравнения $t^2-3t-1=0$, $t_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ — иррациональные, а значит, не подходят. Таким образом, $t=1$, $y=x$, $2x^3=2$, $x=1$, $y=1$.

Ответ: (1; 1).

6.316. $\begin{cases}uv+vw=2a^2,\\ vw+wu=2a^2-a-1,\\ wu+uv=2a^2+a-1.\end{cases}$

Решение.

Если $\begin{cases}uv=x,\\ wu=y,\\ vw=z,\end{cases}$ то система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x+z=2a^2, \\ z+y=2a^2-a-1, \\ y+x=2a^2+a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a^2-z, \\ z+y=2a^2-a-1, \\ y+2a^2-z=2a^2+a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a^2-z, \\ z+y=2a^2-a-1, \\ y-z=a-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2y=2a^2-2,\ y=a^2-1;\ 2z=2a^2-2a,\ z=a^2-a;\ x=2a^2-a^2+a=$
$=a^2+a.$

Пришли к системе

$$\begin{cases} uv=a^2+a, \\ wu=a^2-1, \\ vw=a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=a(a+1), \\ wu=(a-1)(a+1), \\ vw=a(a-1) \end{cases} \Rightarrow u=\frac{a(a+1)}{v};\ w\cdot\frac{a(a+1)}{v}=(a+1)(a-1),$$

$w=\dfrac{a-1}{a}v$ при $a\neq -1$; $v\cdot\dfrac{a-1}{a}v=a(a-1),\ v^2=a^2.$

Отсюда $v_1=-a,\ v_2=a.$

Тогда $w_1=\dfrac{a-1}{a}\cdot(-a)=-a+1,\ w_2=\dfrac{a-1}{a}\cdot a=a-1$ при $a\neq 0;$

$u_1=\dfrac{a(a+1)}{-a}=-(a+1),\ u_2=\dfrac{a(a+1)}{a}=a+1$ при $a\neq 0.$

Ответ: $((-a+1); -a; -a+1), (a+1; a; a-1).$

6.317. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 2x+y+z+x+y=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=6, \\ x+y=1, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-y)+y+z=6, \\ x=1-y, \\ (1-y-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z-4, \\ x=1-y, \\ -y^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=z-4,\\x=1-y,\\(4-z)^3+(z-4+2)^3+(z-3)^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z-4,\\x=1-y,\\z^3-3z^2-9z+22=0.\end{cases}$$

Далее, $z^3-3z^2-9z+22=0\Leftrightarrow z^3-8-3z^2+12-9z+18=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^3-8-3z^2+12-9z+18=0\Leftrightarrow(z^3-8)-3(z^2-4)-9(z-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-2)(z^2+2z+4)-3(z-2)(z+2)-9(z-2)=0\Leftrightarrow(z-2)(z^2-z-11)=0,$$

откуда $z_1=2, z_2=\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, z_3=\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$; тогда $y_1=-2, y_2=-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $y_3=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}; x_1=3, x_2=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}; x_3=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: (3; –2; 2), $\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2};-\frac{7+3\sqrt{5}}{2};\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2};\frac{-7+3\sqrt{5}}{2};\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

6.318. $\begin{cases}x^4+6x^2y^2+y^4=136,\\x^3y+xy^3=30.\end{cases}$

Решение.

Преобразовав исходную систему, имеем:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2=136,\\xy\left(x^2+y^2\right)=30\end{cases}\Rightarrow xy=\frac{30}{x^2+y^2};\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{3600}{\left(x^2+y^2\right)^2}=136\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^4-136\left(x^2+y^2\right)^2+3600=0$, откуда $(x^2+y^2)^2=36$ или $(x^2+y^2)^2=100$.

Отсюда $x^2+y^2=6$ или $x^2+y^2=10$; $xy=5$ или $xy=3$.

Получили две системы уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2=6,\\xy=5;\end{cases}\\\begin{cases}x^2+y^2=10,\\xy=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая эти две системы, имеем $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -1. \end{cases}$

Ответ: (3; 1), (1; 3), (–1; –3), (–3; –1).

6.319. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy+8)(x+y) = 2. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = 19, \\ (xy+8)(x+y) = 2. \end{cases}$$

Если $\begin{cases} x + y = t, \\ xy = z, \end{cases}$ то система принимает вид

$$\begin{cases} t\left(t^2 - 3z\right) = 19, \\ (z+8)t = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{2-8t}{t}; t^3 + 24t - 25 = 0 \Leftrightarrow \left(t^3 - 1\right) + 24(t-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 + t + 25\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Тогда $z = \frac{2-8}{1} = -6$. Таким образом, $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -6, \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

Ответ: (–2; 3), (3; –2).

6.320. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) + x^3y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Если $\begin{cases} x + y = t, \\ xy = z, \end{cases}$ то система принимает вид

$$\begin{cases} t\left(t^2 - 3z\right) + z^3 = 17, \\ t + z = 5 \end{cases} \Rightarrow t = 5 - z; z^2 - 5z + 6 = 0, \text{ откуда } z_1 = 2, z_2 = 3.$$

Тогда $t_1 = 3$, $t_2 = 2$. Приходим к двум системам:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=3,\\ xy=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=2,\\ xy=3, \varnothing;\end{cases}\end{array}\right. \text{ откуда } \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=2;\end{cases} \begin{cases}x_2=2,\\ y_2=1.\end{cases}$$

Ответ: (1; 2), (2; 1).

6.321. $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12,\\ (xy)^2+xy=6.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\dfrac{x}{y}=t$, тогда имеем

$$t^3+t^2-12=0 \Leftrightarrow t^3-8+t^2-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+4)+(t-2)(t+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+6)=0 \Leftrightarrow t=2, \frac{x}{y}=2.$$

Решая второе уравнение системы как квадратное относительно xy, получаем $xy = -3$ и $xy = 2$.

Таким образом, имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=2,\\ xy=-3; \varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x}{y}=2,\\ xy=2,\end{cases}\end{array}\right. \text{ откуда } \begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1;\end{cases} \begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

Ответ: (2; 1), (–2; –1).

6.322. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14,\\ x+y=3.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y \neq 0$.

Пусть $\frac{x}{y}=t$, тогда имеем $t^3+t^2+t-14=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+7)=0 \Leftrightarrow t=2.$

Тогда система принимает вид $\begin{cases} \frac{x}{y}=2, \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

6.323. $\begin{cases} 8x+\frac{8}{y}=3y^2, \\ y+\frac{1}{x}=3x^2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0,\ y \neq 0.$

Перепишем систему в следующем виде: $\begin{cases} 8(xy+1)=3y^3, \\ xy+1=3x^3. \end{cases}$

Разделив первое уравнение системы на второе, находим $\frac{y^3}{x^3}=8,\ y=2x.$

Тогда из первого уравнения данной системы, имеем $8x+\frac{4}{x}=12x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=1;\ y=2.$

Ответ: (1; 2).

6.324. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases} (x+y)^2-2xy-(x+y)=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$

Если $\begin{cases} x+y=t, \\ xy=z, \end{cases}$ то система принимает вид

$\begin{cases} t^2-2z-t=102, \\ z+t=69 \end{cases} \Rightarrow z=69-t;\ t^2+t-240=0,$ откуда $t_1=15,\ t_2=-16;$

$z_1=54,\ z_2=85.$

Получили: $\begin{cases} x+y=15, \\ xy=54 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=-16, \\ xy=85, \ \varnothing; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=9; \end{cases} \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=6. \end{cases}$

Ответ: (6; 9), (9; 6).

6.325. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

Решение.

Так как $x=4-y-z$, то $2(4-y-z)y-z^2=16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2y^2-2(4-z)y+z^2+16=0.$

Решая уравнение как квадратное относительно y, получим

$$y_{1,2}=\frac{4-z\pm\sqrt{-(z+4)^2}}{2}.$$

Дискриминант $D=-(z+4)^2\geq 0 \Leftrightarrow (z+4)^2\leq 0 \Leftrightarrow z=-4.$

Тогда $y=4$; $x=4$.

Ответ: (4; 4; – 4).

6.326. $\begin{cases} 9(u^4+v^4)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 9\left(\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2\right)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$$

Если $\begin{cases} u+v=t, \\ uv=z, \end{cases}$ то система принимает вид

$$\begin{cases} 9\left(\left(t^2-2z\right)^2-2z^2\right)=17t^2, \\ 3z=-2t \end{cases} \Rightarrow t=-\frac{3}{2}z;\ 9z^4-16z^3-4z^2=0,$$

откуда $z_1=0, z_2=2, z_3=-\frac{2}{9}$. Тогда $t_1=0, t_2=-3, t_3=\frac{1}{3}$.

Имеем три случая: $\begin{cases} u+v=0, \\ uv=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} u+v=-3, \\ uv=2, \end{cases}$ или $\begin{cases} u+v=\frac{1}{3}, \\ uv=-\frac{2}{9}. \end{cases}$

Решая системы уравнений, получим

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} u_2 = -1, \\ v_2 = -2; \end{cases} \begin{cases} u_3 = -2, \\ v_3 = -1; \end{cases} \begin{cases} u_4 = \frac{2}{3}, \\ v_4 = -\frac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} u_5 = -\frac{1}{3}, \\ v_5 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0), (– 1; –2), (–2; –1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

6.327. $\begin{cases} xy + \frac{y}{x} = 2\left(x^2 + y^2\right), \\ xy - \frac{x}{y} = x^2 + y^2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения системы второе, имеем

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x};$$

$$1 + \frac{1}{x^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow 2x^4 - x^2 + 1 = 0, \varnothing.$$

Ответ: корней нет.

6.328. $\begin{cases} \left(u^2 + v^2\right)(u + v) = 15uv, \\ \left(u^4 + v^4\right)\left(u^2 + v^2\right) = 85u^2v^2. \end{cases}$

Решение.

Очевидное решение $\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0. \end{cases}$ Пусть $u^2 + v^2 \neq 0$, тогда исходную систему перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \left(u^2 + v^2\right)(u + v) = 15uv, \\ \frac{u^4 + v^4}{u + v} = \frac{17uv}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u^2 + v^2\right)(u + v) = 15uv, \\ 3\left(u^4 + v^4\right) = 17(u + v)uv \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (если $u + v = 0$, то $u^2 + v^2 = 0$)

$$\begin{cases} \left((u + v)^2 - 2uv\right)(u + v) = 15uv, \\ 3\left(\left((u + v)^2 - 2uv\right)^2 - 2u^2v^2\right) = 17(u + v)uv. \end{cases}$$

Если $\begin{cases} u+v=t, \\ uv=z, \end{cases}$ то имеем систему уравнений относительно t и z:

$$\begin{cases} (t^2-2z)t=15z, \\ 3(t^2-2z)^2-2z^2=17tz \end{cases} \Rightarrow z=\frac{t^3}{2t+15};\ t^4(3t^2+17t-210)=0,$$

откуда $t_1=-\frac{35}{3}$, $t_2=6$. Тогда $z_1=\frac{1715}{9}$, $z_2=8$. Таким образом,

$$\begin{cases} u+v=-\frac{35}{3}, \\ uv=\frac{1715}{9}, \end{cases} \varnothing; \text{ или } \begin{cases} u+v=6, \\ uv=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2=2, \\ v_2=4; \end{cases} \begin{cases} u_3=4, \\ v_3=2. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0), (2; 4), (4; 2).

6.329. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=0, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$

(ограничиться отысканием целочисленных решений).

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases} \sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{y^3}=9, \\ \sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{y^2}=5. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[6]{x}=t\ge 0, \\ \sqrt[6]{y}=z\ge 0, \end{cases}$ тогда получаем систему

$$\begin{cases} t^3+z^3=9, \\ t^2+z^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)(t^2-tz+z^2)=9, \\ t^2+z^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)(5-tz)=9, \\ t^2+z^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)(5-tz)=9, \\ (t+z)^2-2tz=5. \end{cases}$$

Если $\begin{cases} t+z=u, \\ tz=v, \end{cases}$ то имеем систему уравнений

$\begin{cases} u(5-v)=9, \\ u^2-2v=5 \end{cases} \Rightarrow v=\dfrac{u^2-5}{2},\ u^3-15u+18=0 \Leftrightarrow (u-3)(u^2+3u-6)=0,$

откуда $u=3$ (u — целое); $v=\dfrac{9-5}{2}=2$. $\begin{cases} t+z=3, \\ tz=2. \end{cases}$

Решив эту систему уравнений, найдем $\begin{cases} t_1=1, \\ z_1=2; \end{cases} \begin{cases} t_2=2, \\ z_2=1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} \sqrt[6]{x}=1, \\ \sqrt[6]{y}=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt[6]{x}=2, \\ \sqrt[6]{y}=1. \end{cases}$ Отсюда имеем $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=64; \end{cases} \begin{cases} x_2=64, \\ y_2=1. \end{cases}$

Ответ: (1; 64), (64; 1).

6.330. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{ax+by}{bx+ay}>0, \\ \dfrac{x+1}{y}>0. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}=t>0$, тогда относительно t первое уравнение принимает вид $t+\dfrac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0$.

Отсюда $t=1$. Тогда $\sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{ax+by}{bx+ay}=1 \Leftrightarrow (a-b)x=(a-b)y$.

Имеем $x=y$ при $a-b\neq 0$, и $x\in$ ОДЗ и $y\in$ ОДЗ при $a-b=0$.
Второе уравнение исходной системы перепишем в виде

$$\sqrt{\frac{x+y}{y}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{y}}}-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x+1}{y}}\right)^2-5\left(\sqrt{\frac{x+1}{y}}\right)+2=0,$$

где $\sqrt{\dfrac{x+1}{y}}>0$.

Отсюда $\sqrt{\frac{x+1}{y}}=\frac{1}{2}$ или $\sqrt{\frac{x+1}{y}}=2 \Rightarrow y=4x+4$ или $y=\frac{x+1}{4}$.

Получаем следующие четыре случая:

1) $\begin{cases} x=y \text{ при } a\neq b, \\ y=4x+4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=y \text{ при } a\neq b, \\ y=\dfrac{x+1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\in \text{ОДЗ при } a=b\neq 0, \\ y\in \text{ОДЗ при } a=b\neq 0; \\ y=4x+4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\in \text{ОДЗ при } a=b\neq 0, \\ y\in \text{ОДЗ при } a=b\neq 0; \\ y=\dfrac{x+1}{4}. \end{cases}$

Решая первые две системы, имеем

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{4}{3}, \\ y_1=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \text{при } a\neq b; \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3}, \\ y_2=\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{при } a\neq b.$$

Третья и четвертая системы при $a=b\neq 0$ имеют бесконечное множество решений, геометрически представляющих собой координаты точек двух прямых $x-4y=-1$ и $4x-y=-4$.

Ответ: если $a\neq b$, то $x_1=-\frac{4}{3}$, $y_1=-\frac{4}{3}$; $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=\frac{1}{3}$; если $a=b\neq 0$, то система имеет бесконечно много решений, представляющих собой координаты точек двух прямых $x-4y=-1$ и $4x-y=-4$.

6.331. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0. \end{cases}$

Возведя в квадрат первое и второе уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}+2\sqrt{x^2-y}+x-\sqrt{y}=4, \\ y+\sqrt{x}-2\sqrt{y^2-x}+y-\sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y}=2-x, \\ 2\sqrt{y^2-x}=2y-1 \end{cases}$$

при $\begin{cases} 2-x\geq 0, \\ 2y-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2, \\ y\geq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Еще раз возведя в квадрат, получим

$$\begin{cases} x^2-y=4-4x+x^2, \\ 4y^2-4x=4y^2-4y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-4, \\ y=\dfrac{1+4x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{12}, \\ y=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{17}{12};\frac{5}{3}\right)$.

6.332. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3, \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3, \\ \sqrt{xyz}=1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ z>0. \end{cases}$

Складывая первое и второе уравнения системы, находим

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}-\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^2+2+\left(\sqrt[4]{\frac{y}{z}}-\sqrt[4]{\frac{z}{y}}\right)^2+2+\left(\sqrt[4]{\frac{z}{x}}-\sqrt[4]{\frac{x}{z}}\right)^2+2=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}-\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{y}{z}}-\sqrt[4]{\frac{z}{y}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\frac{z}{x}}-\sqrt[4]{\frac{x}{z}}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z.$$

Из третьего уравнения системы имеем $x = 1$; тогда $y = 1$ и $z = 1$.
Ответ: (1; 1; 1).

6.333. $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

ОДЗ: $y \in \left(-\infty; \sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Возведя обе части первого уравнения системы в квадрат, имеем

$$x^2+5+2\sqrt{\left(x^2+5\right)\left(y^2-5\right)}+y^2-5=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x^2+5\right)\left(y^2-5\right)}=6 \Rightarrow \left(x^2+5\right)\left(y^2-5\right)=36.$$

Из второго уравнения системы $y^2 = 13 - x^2$.

Тогда $(x^2 + 5)(8 - x^2) = 36 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; $y^2 = 9$, $y_1 = -3$, $y_2 = 3$.

Получили $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 3. \end{cases}$

Ответ: (2; 3), (–2; –3), (2; –3), (–2; 3).

6.334. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Возведя первое и второе уравнения системы в квадрат, находим

$$\begin{cases} x+2\sqrt{xy+x}+y+1=1, \\ x+1+2\sqrt{xy+y}+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{xy+x}=-x-y, \\ 2\sqrt{xy+y}=-x-y, \end{cases}$$ где $-x-y \ge 0$.

Учитывая ОДЗ, имеем $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Ответ: (0; 0).

6.335. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8, \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y \ge 0, \\ x-y \ge 0. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{(x+y)^2(x-y)}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[4]{x-y}=12.\end{cases}$$

Тогда $\sqrt[4]{x-y}=8-\sqrt{x+y}, \sqrt{x+y}\left(8-\sqrt{x+y}\right)=12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+y}\right)^2-8\sqrt{x+y}+12=0$, отсюда $\sqrt{x+y}=2$ или $\sqrt{x+y}=6$.

Тогда $\sqrt[4]{x-y}=6$ или $\sqrt[4]{x-y}=2$.

Таким образом, получили два случая:

1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=2,\\ \sqrt[4]{x-y}=6\end{cases}$ или 2) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=6,\\ \sqrt[4]{x-y}=2.\end{cases}$ Отсюда $\begin{cases}x_1=650,\\ y_1=-646;\end{cases}\begin{cases}x_2=26,\\ y_2=10.\end{cases}$

Ответ: (26; 10), (650; – 646).

6.336. $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y),\\ x^2-y^2=41.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x^2-xy\ge 0,\\ xy-y^2\ge 0,\\ x-y\ge 0.\end{cases}$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{x(x-y)}+\sqrt{y(x-y)}-3(x-y)=0\Leftrightarrow\sqrt{x-y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-3\sqrt{x-y}\right)=0.$$

Таким образом, имеем:

1) $\begin{cases}\sqrt{x-y}=0,\\ x^2-y^2=41;\varnothing;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{x-y},\\ x^2-y^2=41.\end{cases}$

Пусть $u=\sqrt{x}\ge 0, v=\sqrt{y}\ge 0$, тогда

$$\begin{cases}u+v=3\sqrt{u^2-v^2},\\ u^4-v^4=41\end{cases}\Rightarrow(u+v)^2=9\left(u^2-v^2\right)\Leftrightarrow u^2-v^2=\frac{(u+v)^2}{9}.$$

Подставляя во второе уравнение системы $(u^2-v^2)(u^2+v^2)=41$, получаем $\frac{(u+v)^2}{9}\cdot(u^2+v^2)=41 \Leftrightarrow (u+v)^2\cdot(u^2+v^2)=41\cdot 9$.

Система принимает следующий вид:

$$\begin{cases}(u+v)^2(u^2+v^2)=41\cdot 9,\\(u+v)(u-v)(u^2+v^2)=41.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе при $u+v\neq 0$, $u-v\neq 0$, имеем $\frac{u+v}{u-v}=9$, откуда $u=\frac{5}{4}v$.

Тогда $v^4=\frac{256}{9}$, $v^2=\frac{16}{3}$; $u^2=\frac{25}{3}$. Так как $x=u^2$, $y=v^2$, то $\begin{cases}x=\frac{25}{3},\\y=\frac{16}{3}.\end{cases}$

Проверкой убеждаемся, что это решения системы.

Ответ: $\left(\frac{25}{3};\frac{16}{3}\right)$.

6.337. $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6,\\2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12,\\x+y+z=14.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt{x-4}=u\geq 0,\\\sqrt{y}=v\geq 0,\\\sqrt{z+4}=w\geq 0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=u^2+4,\\y=v^2,\\z=w^2-4.\end{cases}$

Тогда исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}u+v+w=16,\\2u-v-4w=-12,\\u^2+v^2+w^2=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=6-v-w,\\2(6-v-w)-v-4w=-12,\\(6-v-w)^2+v^2+w^2=14.\end{cases}$$

Из второго уравнения системы $v = 8 - 2w$, тогда из третьего уравнения находим $(6-(8-2w)-w)^2+(8-2w)^2+w^2=14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w^2-6w+9=0 \Leftrightarrow w=3$.

Тогда $v = 2$; $u = 6 - 2 - 3 = 1$. Получили:

$$\begin{cases} x=1+4=5, \\ y=(2)^2=4, \\ z=(3)^2-4=5. \end{cases}$$

Ответ: (5; 4; 5).

6.338. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ x+y-4\ge 0. \end{cases}$

Возводя первое и второе уравнения системы в шестую степень, получим

$$\begin{cases} (x-y)^2=(x-y)^3, \\ (x+y)^2=(x+y-4)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2-(x-y)^3=0, \\ (x+y)^2-(x+y-4)^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2\cdot(1-(x-y))=0, \\ (x+y)^2-(x+y-4)^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0, \\ (x+y)^2-(x+y-4)^3=0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x+y=0, \\ (x+y)^2-(x+y-4)^3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y, \\ 2y^3-13y^2+24y-16=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+y, \\ (x+y)^3-13(x+y)^2+48(x+y)-64=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y, \\ (y-4)(2y^2-5y+4)=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+y, \\ ((x+y)-8)((x+y)^2-5(x+y)+8)=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Имеем следующие четыре случая:

$$1)\begin{cases} x = y, \\ y-4=0, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 4; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x = y, \\ 2y^2-5y+4=0, (D<0), \varnothing; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x = 1+y, \\ x+y=8, \end{cases} \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=8, \end{cases} \begin{cases} 2x=9, \\ 2y=7, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \dfrac{9}{2}, \\ y_2 = \dfrac{7}{2}; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x = 1+y, \\ (x+y)^2-5(x+y)+8=0, (D<0), \varnothing. \end{cases}$$

Ответ: (4; 4), (4,5; 3,5).

6.339. $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 1-4x^2 \ge 0, \\ 1-4y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Возведя левую и правую части первого уравнения системы в квадрат, получим

$$1-4x^2-2\sqrt{(1-4x^2)(1-4y^2)}+1-4y^2=4x^2+8xy+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2-4y^2+16x^2y^2}=1-4x^2-4y^2-4xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-4(x^2+y^2)+16x^2y^2}=1-4(x^2+y^2)-4xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+16xy+16x^2y^2}=12x+2 \Rightarrow 2+16xy+16x^2y^2=144x^2y^2+48xy+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64x^2y^2+16xy+1=0 \Leftrightarrow (8xy+1)^2=0 \Leftrightarrow xy=-\frac{1}{8}.$$

Тогда данная система принимает вид

$$\begin{cases} xy = -\dfrac{1}{8}, \\ x^2 + y^2 + 4xy = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{8y}, \\ 64y^4 - 16y^2 + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

6.340. $\begin{cases} u + v + \sqrt{u^2 - v^2} = 12, \\ v\sqrt{u^2 - v^2} = 12. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $u^2 - v^2 \geq 0$.

Из условия имеем $\sqrt{u^2 - v^2} = \dfrac{12}{v}$, $u + v + \dfrac{12}{v} = 12 \Leftrightarrow u = \dfrac{12v - v^2 - 12}{v}$.

Возведя второе уравнение исходной системы в квадрат и, подставляя $u = \dfrac{12v - v^2 - 12}{v}$, получаем $v^2\left(\left(\dfrac{12v - v^2 - 12}{v}\right)^2 - v^2\right) = 144$, $v \neq 0, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(v^2 - 7v + 12) = 0$, откуда $v_1 = 3$, $v_2 = 4$.

Тогда $u_1 = \dfrac{12 \cdot 3 - 9 - 12}{3} = 5$, $u_2 = \dfrac{12 \cdot 4 - 16 - 12}{4} = 5$.

Ответ: (5; 3), (5; 4).

6.341. $\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 32, \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 162. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=32, \\ y^2+y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}=162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=32, \\ y^{\frac{4}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)=162 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{81}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^4=\left(\frac{81}{16}\right)^3, \left(\frac{y}{x}\right)^4=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^3; \left(\frac{y}{x}\right)^4=\left(\frac{27}{8}\right)^4, \frac{y}{x}=\pm\sqrt[4]{\left(\frac{27}{8}\right)^4}=\pm\frac{27}{8};$$

$y_1=-\frac{27x}{8}$; $y_2=\frac{27x}{8}$.

Отсюда:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=\frac{128}{13}, \\ y=-\frac{27}{8}x; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=\frac{128}{13}, \\ y=\frac{27}{8}x; \end{cases} \end{array}\right. \begin{cases} x_1=\frac{8\sqrt{26}}{13}, \\ y_1=\frac{27\sqrt{26}}{13}; \end{cases} \begin{cases} x_2=\frac{-8\sqrt{26}}{13} \\ y_2=\frac{-27\sqrt{26}}{13} \end{cases} \begin{cases} x_3=-\frac{8\sqrt{26}}{13}, \\ y_3=\frac{27\sqrt{26}}{13}; \end{cases} \begin{cases} x_4=\frac{8\sqrt{26}}{13}, \\ y_4=-\frac{27\sqrt{26}}{13}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{27\sqrt{26}}{13}\right), \left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{27\sqrt{26}}{13}\right), \left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{27\sqrt{26}}{13}\right),$
$\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$.

6.342. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$. Пусть $S_n=\alpha^n+\beta^n$, где α и β — корни уравнения. Найти зависимость между S_n, S_{n+1}, S_{n+2}.

Решение.

По теореме Виета для уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеем

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \\ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

По условию $S_n = \alpha^n + \beta^n$, $S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$, $S_{n+2} = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2}$.

$$S_n \cdot \alpha\beta = \alpha^n \cdot \alpha\beta + \beta^n \cdot \alpha\beta = \alpha^{n+1} \cdot \beta + \beta^{n+1} \cdot \alpha = S_n \cdot \frac{c}{a};$$

$$S_{n+1} \cdot (\alpha + \beta =) = \alpha^{n+2} + \alpha^{n+1}\beta + \beta^{n+2} + \beta^{n+1}\alpha = S_{n+2} + S_n \cdot \frac{c}{a};$$

$$S_{n+1} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = S_{n+2} + S_n \frac{c}{a}, \text{ откуда } S_{n+2} = -\left(S_{n+1} \cdot \frac{b}{a} + S_n \cdot \frac{c}{a}\right)$$

Ответ: $S_{n+2} = -\left(S_{n+1} \cdot \dfrac{b}{a} + S_n \cdot \dfrac{c}{a}\right)$

6.343. Числа x_1, x_2, x_3 служат корнями уравнения $x^3 + px^2 + ax + r = 0$. Требуется: 1) составить уравнение с корнями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1; 2) воспользоваться результатом п.1 для отыскания корней уравнения $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2} = 0$.

Решение.

1) Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то по теореме Виета находим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, \\ x_1x_2x_3 = -r. \end{cases}$$

Составим уравнение $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ с корнями $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_2x_3$, $y_3 = x_1x_3$.

Имеем

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -a, \\ x_1x_2 \cdot x_2x_3 + x_1x_2 \cdot x_1x_3 + x_2x_3 \cdot x_1x_3 = b, \Leftrightarrow \\ x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_3 = -c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -a, \\ (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_1x_2x_3 = b, \Rightarrow \\ (x_1x_2x_3)^2 = -c \end{cases} \begin{cases} a = -q, \\ b = rp, \\ c = -r^2. \end{cases}$$

Тогда искомое уравнение примет вид $y^3 - qy^2 + rpy - r^2 = 0$.

2) Чтобы найти корни уравнения $x^3-3\sqrt{2}x^2+7x-3\sqrt{2}=0$ по п.1 имеем $p=-3\sqrt{2}$, $q=7$, $r=-3\sqrt{2}$. Составив уравнение с корнями $y_1=x_1x_2$, $y_2=x_2x_3$, $y_3=x_1x_3$, имеем уравнение $y^3-qy^2+rpy-r^2=0$ или после подстановки значений $p=-3\sqrt{2}$, $q=7$, $r=-3\sqrt{2}$, y^3-7y^2+ $+18y-18=0$. Это уравнение можно записать в виде $(y-3)(y^2-4y+6)=0$. Отсюда получим $y-3=0$, $y_1=3$; $y^2-4y+6=0$; $\varnothing(D<0)$. Уравнение имеет единственный корень $y_1=3$.

Тогда $y_1=x_1x_2=3$. Подставляя это значение y_1 в третье уравнение первой системы, получим с учетом $r=-3\sqrt{2}$: $x_1x_2x_3=3x_3=3\sqrt{2}$ или $x_3=\sqrt{2}$.

Ответ: 1)$y^3-qy^2+rpy-r^2=0$; 2)$x=\sqrt{2}$.

6.344. Найти коэффициенты a и b уравнения $x^4+x^3-18x^2+$ $+ax+b=0$, если известно, что среди его корней имеются три равных целых числа.

Решение.

Пусть $x_1=x_2=x_3$ и x_4 — корни уравнения.

По теореме Виета для уравнения $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$ запишем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4=-18, \\ x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4=-a, \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=b, \end{cases}$$

отсюда, так как $x_1=x_2=x_3$,

$$\begin{cases} 3x_1+x_4=-1, \\ 3x_1^2+3x_1x_4=-18, \\ x_1^3+3x_1^2x_4=-a, \\ x_1^3x_4=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=-1-3x_1, \\ x_1(x_1+x_4)=-6, \\ x_1^2(x_1+3x_4)=-a, \\ x_1^3x_4=b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_4=-1-3x_1, \\ x_1(x_1-1-3x_1)=-6, \\ x_1^2(x_1-3-9x_1)=-a, \\ x_1^3(-1-3x_1)=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=-1-3x_1, \\ 2x_1^2+x_1-6=0, \\ 8x_1^3+3x_1^2=a, \\ 3x_1^4+x_1^3=-b. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_1' = -2$ или $x_1'' = \frac{3}{2}$. По условию три корня — равные целые числа, поэтому $x_1 = -2$. Тогда $a = -52$; $b = -40$.

Ответ: $a = -52$; $b = -40$.

6.345. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

Решение.

Пусть $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_4$ — корни данного уравнения.

По теореме Виета запишем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = 37, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = q. \end{cases}$$

Учитывая условие, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 10, \\ x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_3 + x_1x_3 = 37, \\ x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 = -p, \\ x_1^2x_3^2 = q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 = 37, \\ 2x_1^2x_3 + 2x_1x_3^2 = -p, \\ x_1^2x_3^2 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ (x_1 + x_3)^2 + 2x_1x_3 = 37, \\ 2x_1x_3(x_1 + x_3) = -p, \\ (x_1x_3)^2 = q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ 25 + 2x_1x_3 = 37, \\ 10x_1x_3 = -p, \\ (x_1x_3)^2 = q \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_3 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_3 = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} p = -60, \\ q = 36. \end{cases}$$

Ответ: $p = -60$; $q = 36$.

6.346. Для уравнения $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ произведение суммы его корней на сумму их обратных величин выразить через коэффициенты a и b.

Решение.

По теореме Виета для данного уравнения запишем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} = -b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1x_3}{x_1x_2x_3} = -b \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -a \cdot (-b) = ab.$$

Ответ: ab.

6.347. Показать, что равенство $ab = c$ выражает необходимое и достаточное условие того, что среди корней уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеются два числа, сумма которых равна нулю.

Решение.

Если $x_1 + x_2 = 0$ и x_3 — корни уравнения, то по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -a, \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -a, \\ x_1x_2 = b, \\ x_1x_2 = \dfrac{-c}{-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -a, \\ \dfrac{c}{a} = b, \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

откуда $ab = c$.

6.348. Решить уравнение $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$, если известно, что среди его корней имеются два числа, обратных по абсолютной величине и противоположных по знаку.

Решение.

Пусть $x_1, -\dfrac{1}{x_1}, x_3$ — корни данного уравнения.

По теореме Виета, учитывая условия, запишем

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{x_1} + x_3 = -\dfrac{4}{12}, \\ x_1\left(-\dfrac{1}{x_1}\right) + x_1x_3 + \left(-\dfrac{1}{x_1}\right)x_3 = -\dfrac{17}{12}, \\ x_1\left(-\dfrac{1}{x_1}\right)x_3 = -\dfrac{6}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{x_1} + x_3 = -\dfrac{1}{3}, \\ -1 + x_1x_3 - \dfrac{x_3}{x_1} = -\dfrac{17}{12}, \\ -x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}, \\ -1 + \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{1}{2x_1} = -\dfrac{17}{12}, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1^2 + 5x_1 - 6 = 0, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

6.349. Решить уравнения $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ и $6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, если известно, что они имеют общий корень.

Решение.

Рассмотрим общую систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0, \\ 6x^2 - 3x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^3 - 15x^2 + 18x - 6 = 0, \\ 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 20x + 7 = 0,$$

откуда $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{7}{6}$. Проверкой из первого и второго уравнений исходной системы получим $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Разделим первое уравнение системы на $x-\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2+6x-2 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} -\underline{2x^3-x^2} & 2x^2-4x+4. \\ -4x^2+6x & \\ -\underline{-4x^2+2x} & \\ 4x-2 & \\ -\underline{4x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

(Деление можно также осуществлять по схеме Горнера.)

Имеем $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+4\right)=0$, откуда $x-\frac{1}{2}=0$

или $2x^2-4x+4=0, \varnothing(D<0)$.

Разделим второе уравнение системы на $x-\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3-3x^2-2x+1 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} -\underline{6x^3-3x^2} & 6x^2-2. \\ -2x+1 & \\ -\underline{-2x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Получили $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(6x^2-2\right)=0$, откуда $x-\frac{1}{2}=0$

или $6x^2-2=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: для первого уравнения $x=\frac{1}{2}$; для второго уравнения $x_1=\frac{1}{2}$; $x_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.350. Составить уравнение третьей степени по его корням x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, если числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Решение.

По теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$

Составим уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, где по формулам Виета и с учетом условия,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = -a, \\ x_1^2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2x_2^2 = b, \\ x_1^2x_1x_2x_2^2 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = -a, \\ x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 = b, \\ x_1^3x_2^3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = -a, \\ x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1x_2)^2 = b, \\ (x_1x_2)^3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = -a, \\ x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + (x_1x_2)^2 = b, \\ (x_1x_2)^3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = -a, \\ x_1x_2(x_1 + x_2)^2 - (x_1x_2)^2 = b, \\ (x_1x_2)^3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-p)^2 - q = -a, \\ q(-p)^2 - q^2 = b, \\ q^3 = -c, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} a = q - p^2, \\ b = p^2q - q^2, \\ c = -q^3. \end{cases}$$

Искомое уравнение имеет вид $x^3 + (q - p^2)x^2 + (qp^2 - q^2)x - q^3 = 0$.

Ответ: $x^3 - (p^2 - q)x^2 + (p^2q - q^2)x - q^3 = 0$.

6.351. Решить уравнения $x^3 - 6x^2 - 39x - 10 = 0$ и $x^3 + x^2 - 20x - 50 = 0$, воспользовавшись тем, что один из корней первого уравнения в два раза больше одного из корней второго уравнения.

Решение.

По условию имеем

$$\begin{cases} (2x)^3 - 6(2x)^2 - 39(2x) - 10 = 0, \\ x^3 + x^2 - 20x - 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 24x^2 - 78x - 10 = 0, \\ 8x^3 + 8x^2 - 160x - 400 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 41x - 195 = 0,$$

откуда $x_1 = -\frac{39}{16}$, $x_2 = 5$. Подставляя во второе уравнение системы значения x_1 и x_2, убеждаемся, что его корнем является $x = 5$. Тогда корнем первого уравнения является $x = 10$.

Разделив левую часть первого уравнения на $x - 10$, найдем $(x^3-6x^2-39x-10):(x-10)=x^2+4x+1$; тогда уравнение можно переписать в виде $(x-10)(x^2+4x+1)=0$, откуда $x_1 = 10$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$.

Разделив левую часть второго уравнения на $x - 5$, имеем $(x^3+x^2-20x-50):(x-5)=x^2+6x+10$; тогда уравнение можно записать в виде $(x-5)(x^2+6x+10)=0$, откуда $x_4 = 5$, $x^2 + 6x + 10 \neq 0$, $D < 0$.

Таким образом, корнями первого уравнения являются $x_1 = 10$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$, а корнем второго уравнения является $x = 5$.

Ответ: $x_1 = 10$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$, $x = 5$.

6.352. Решить уравнения $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$ и $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, воспользовавшись тем, что у них есть общий корень.

Решение.

Делителями свободного члена второго уравнения являются ± 1, ± 2, ± 5, ± 10; $x_1 = -2$ удовлетворяет второму уравнению. Разделив его на $x + 2$, найдем $(x^3-2x^2-3x+10):(x+2)=x^2-4x+5\neq 0$, так как $D < 0$.

Таким образом, уравнение $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ имеет единственный корень $x = -2$. Этот корень должен быть корнем и первого уравнения.

Разделив многочлен $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96$ на $x + 2$, найдем $(x^4-x^3-22x^2+16x+96):(x+2)=x^3-3x^2-16x+48$.

Тогда $(x+2)(x^3-3x^2-16x+48)=0$, откуда $x + 2 = 0$ или

$x^3-3x^2-16x+48+48=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)-16(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-16)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)(x+4)=0$,

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm 4$ и $x = -2$.

6.353. Найти все значения λ, при которых уравнения $\lambda x^3 - x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ и $\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ имеют общий корень, и найти этот корень.

Решение.

Решаем первое уравнение относительно λ: $\lambda x^3 - \lambda = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda(x-1)(x^2+x+1) = x^2+x+1 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1}{x-1}$, где $x\neq 1$.

Решаем второе уравнение также относительно λ:

$\lambda x^2 - \lambda = x + 1 \Leftrightarrow \lambda\left(x^2 - 1\right) = x + 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{x-1}$, где $x \neq 1$.

Тогда $x = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda}$ при $\lambda \neq 0$.

Ответ: $x = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$ при $\lambda \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

6.354. Решить уравнение $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$, если известно, что два из его корней x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $2x_1 - 4x_2 = 1$.

Решение.

По теореме Виета и условию имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{1}{2}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -\dfrac{17}{4}, \\ 2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{2x_1 - 1}{4}, \\ 6x_1 + 4x_3 = -1, \\ (x_1 + x_3)(2x_1 - 1) + 4x_1 x_3 = -17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{6x_1 + 1}{4},\ 28x_1^2 + 4x_1 - 69 = 0,$$

откуда $\left[\begin{array}{l} x_1' = \dfrac{3}{2}, \\ x_1'' = -\dfrac{23}{14}. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x_2' = \dfrac{1}{2} \\ x_2'' = -\dfrac{15}{28}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_3' = -\dfrac{5}{2}, \\ x_3'' = \dfrac{31}{14}; \end{array}\right.$ $x_1'' = -\dfrac{23}{14}, x_2'' = -\dfrac{15}{28}, x_3'' = \dfrac{31}{14}$ не подходят по условию.

Ответ: $x_1 = \dfrac{3}{2},\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = -\dfrac{5}{2}$.

6.355. Показать, что для всякого натурального числа n выполняется равенство $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$, и с его помощью решить уравнение $(1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1)) : \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{342}\right) = 342$.

Решение.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2-1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Равенство доказано.

Рассмотрим уравнение.

В первой скобке уравнения — сумма членов арифметической прогрессии S_k, у которой $a_1=1$, $d=3-1=2$, $a_k=2n+1$,

$$k=\frac{a_k-a_1}{d}+1=\frac{2n+1-1}{2}+1=n+1.$$

Тогда $S_k=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}\cdot k=\frac{2+2(n+1-1)}{2}\cdot(n+1)=(n+1)^2$.

Используя доказанное равенство, найдем число и сумму членов, стоящих во второй скобке уравнения: $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{342}$, откуда $(n+1)(n+2)=342$ или $n=17$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}=\frac{17+1}{17+2}=\frac{18}{19}$.

Тогда исходное уравнение имеет вид $(n+1)^2:\frac{18}{19}=342\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(n+1)^2=18^2$, откуда $n=17$.

Ответ: $n=17$.

6.356. Решить уравнение $x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0$, если известно, что оно имеет по крайней мере одну пару корней, разность между которыми равна 1.

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 — корни данного уравнения и $x_1-x_2=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1+x_2=x_1$.

По теореме Виета и условию запишем

$$\begin{cases}1+x_2+x_2+x_3+x_4=6,\\(1+x_2)x_2+(1+x_2)x_3+(1+x_2)x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=7,\\(1+x_2)x_2x_3+(1+x_2)x_3x_4+x_2x_3x_4+(1+x_2)x_2x_4=-6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_2+x_3+x_4=5,\\x_2+x_2^2+x_3+2x_2x_3+x_4+2x_2x_4+x_3x_4=7,\\x_2x_3+x_2^2x_3+x_3x_4+2x_2x_3x_4+x_2x_4+x_2^2x_4=-6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3+x_4=5-2x_2, \\ 2x_2(x_3+x_4)+x_3+x_4+x_3x_4+x_2+x_2^2=7, \\ x_3\left(x_2+x_2^2\right)+x_3x_4(2x_2+1)+x_4\left(x_2+x_2^2\right)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3+x_4=5-2x_2, \\ 2x_2(5-2x_2)+5-2x_2+x_3x_4+x_2+x_2^2=7, \Rightarrow \\ (x_3+x_4)\left(x_2+x_2^2\right)+x_3x_4(2x_2+1)=-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3x_4=\frac{(2x_2-5)\left(x_2+x_2^2\right)-6}{2x_2+1},\ x_2^3-3x_2^2+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_2^3-x_2^2\right)-\left(2x_2^2-2\right)=0 \Leftrightarrow x_2^2(x_2-1)-2(x_2-1)(x_2+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_2-1)\left(x_2^2-2x_2-2\right)=0,$$

откуда $x_2=1$, или $x_2=1-\sqrt{3}$, или $x_2=1+\sqrt{3}$. Тогда $x_1=1+1=2$, или $x_1=1+1-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$, или $x_1=1+1+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

Далее, используя значения $x_2=1$; $x_2=1-\sqrt{3}$; $x_2=1+\sqrt{3}$, получим совокупность трех систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_3+x_4=3, \\ x_3x_4=-4; \end{cases} \\ \begin{cases} x_3+x_4=3+2\sqrt{3}, \\ x_3x_4=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}, \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} x_3x_4=3-2\sqrt{3}, \\ x_3x_4=\dfrac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases} x_4=3-x, \\ x_3(3-x_3)=-4; \end{cases} x_3^2-3x_3-4=0;\ x_{3_{1,2}}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x_3=4, \\ x_3=-1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_4=3-4=-1, \\ x_4=3+1=4, \end{array}\right.$$

откуда $x_3=-1$, $x_4=4$ или $x_3=4$, $x_4=-1$. Ни один из корней этой системы не удовлетворяет исходному уравнению.

Корни третьей системы: $x_3=2-\sqrt{3}$, $x_4=1-\sqrt{3}$ или

$x_3=3-2\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=1-\sqrt{3}$, $x_4=3-2\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$.

Ответ: $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=1+\sqrt{3}$, $x_3=1-\sqrt{3}$, $x_4=2-\sqrt{3}$.

6.357. Решить уравнение $3x^3+2\sqrt{3}x^2-21x+6\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

Решение.

По теореме Виета и условию запишем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ x_1x_2x_3=-2\sqrt{3}, \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ 1\cdot x_3=-2\sqrt{3}, \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-2\sqrt{3}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ x_3=-2\sqrt{3}, \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, \\ x_3=-2\sqrt{3}, \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_2=\dfrac{1}{x_1}$, $3x_1^2-4\sqrt{3}x_1+3=0$, откуда $x_1=\sqrt{3}$ или $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; тогда $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $x_2=\sqrt{3}$.

Ответ: $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_3=-2\sqrt{3}$.

6.358. Решить уравнения $x^3-7x^2+12x-10=0$ и x^3-10x^2-2x+ $+20=0$, если известно, что один из корней первого уравнения в 2 раза меньше одного из корней второго уравнения.

Решение.

Пусть x_1 — корень уравнения $x^3-7x^2+12x-10=0$, а x_2 — корень уравнения $x^3-10x^2-2x+20=0$.

Тогда по условию $2x_1 = x_2$ и

$$\begin{cases} x_1^3 - 7x_1^2 + 12x_1 - 10 = 0, \\ (2x_1)^3 - 10(2x_1)^2 - (2x_1) + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 - 7x_1^2 + 12x_1 - 10 = 0, \\ 8x_1^3 - 40x_1^2 - 4x_1 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -16x_1^2 + 100x_1 - 100 = 0$, откуда $x_1 = 5$ или $x_1 = \dfrac{5}{2}$ не является корнем первого уравнения.

Далее, $(x^3 - 7x^2 + 12x - 10) : (x - 5) = x^2 - 2x + 2 \neq 0$, так как $D < 0$; $(x - 5)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$, $x_1 = 5$.

Таким образом, первое уравнение имеет единственный корень $x = 5$.

При $x_1 = 5$, $x_2 = 10$. Делим левую часть второго уравнения на $x - 10$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 - 10x^2 - 2x + 20 & x - 10 \\ \underline{x^3 - 10x^2} \qquad\qquad & x^2 - 2. \\ -\,-2x + 20 & \\ \underline{-2x + 20} & \\ 0 & \end{array}$$

(Деление можно также осуществлять по схеме Горнера.)

Тогда имеем $(x - 10)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$, откуда $x_1 = 10$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$.

Ответ: $x = 5$ и $x_1 = 10$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

6.359. Найти все три корня уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, если его коэффициенты удовлетворяют условию $ad = bc$.

Решение.

По теореме Виета и условию запишем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \Rightarrow x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} - x_1, \; x_2x_3 = -\dfrac{bc}{a^2x_1}. \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{bc}{a^2} \end{cases}$$

Тогда из второго уравнения системы имеем

$$x_1\left(-\frac{b}{a}-x_1\right)-\frac{bc}{a^2x_1}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{bc}{a^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x+\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x^2+\frac{c}{a}\right)=0,$$

откуда $x_1=-\frac{b}{a}, x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ при $ca<0$. Так как $-\frac{d}{a}=-\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}$, то $-\frac{c}{a}=-\frac{d}{b}$, следовательно, $x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{d}{b}}$ при $db<0$.

Ответ: $x_1=-\frac{b}{a}; x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{d}{b}}$ при $bd<0$.

6.360. Показать, что условие $kb^2-(k+1)^2ac=0$ $(k\neq 0)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы отношение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ было равно k.

Решение.

1) Пусть $kb^2-(k+1)^2ac=0$, тогда дискриминант исходного уравнения $D=b^2-4ac=b^2-\frac{4kb^2}{(k+1)^2}=\frac{(k-1)^2b^2}{(k+1)^2}\geq 0.$

(Если $k=-1, b=0, ax^2+c=0, x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{x_2}{x_1}=-1$; но не исключен и случай комплексных корней.)

Тогда $x_{1,2}=\frac{-b\pm\frac{(k-1)b}{k+1}}{2a}, x_1=-\frac{b}{a(k+1)}, x_2=-\frac{Rb}{a(k+1)}\Rightarrow\frac{x_2}{x_1}=k.$

2) Обратно, пусть x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0, \frac{x_1}{x_2}=k.$

По теореме Виета

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a},\\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{b^2}{ac}\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}+2+\frac{x_2}{x_1}=\frac{b^2}{ac}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k+2+\frac{1}{k}=\frac{b^2}{ac}\Rightarrow kb^2-(k+1)^2ac=0.$$

Что и требовалось доказать.

6.361. Решить уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если его коэффициенты a, b, c и d в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию с заданным знаменателем q.

Решение.

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$ax^3+aqx^2+aq^2x+aq^3=0\Leftrightarrow x^3+qx^2+q^2x+q^3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+q)(x^2+q^2)=0\Leftrightarrow x=-q.$$

Ответ: $x=-q$.

6.362. Доказать, что если корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ составляют геометрическую прогрессию, то один из них равен $-\sqrt[3]{c}$.

Решение.

Пусть x_1, $x_2=x_1q$, $x_3=x_1q^2$ — корни данного уравнения. Тогда по теореме Виета $x_1x_2x_3=x_1\cdot x_1q\cdot x_1q^2=x_1^3q^3=(x_1q)^3=-c$.

Отсюда $x_1q=x_2=-\sqrt[3]{c}$.

6.363. Решить уравнение $64x^3-24x^2-6x+1=0$, если известно, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases}x_1+x_1q+x_1q^2=\frac{24}{64},\\ x_1\cdot x_1q\cdot x_1q^2=-\frac{1}{64}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1(1+q+q^2)=\frac{3}{8},\\ x_1q=-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1(1+q+q^2)=\frac{3}{8},\\ q=-\frac{1}{4x_1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16x_1^2-10x_1+1=0,\\ q=-\frac{1}{4x_1},\end{cases}$$

откуда $x_1=\frac{1}{2}$ или $x_1=\frac{1}{8}$.

Тогда $q=-\frac{1}{2}$ при $x_1=\frac{1}{2}$ или $q=-2$ при $x_1=\frac{1}{8}$.

Получили:

1) $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=x_1q=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$; $x_3=x_1q^2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$;

2) $x_1=\frac{1}{8}$; $x_2=\frac{1}{8}(-2)=-\frac{1}{4}$; $x_3=\frac{1}{8}(-2)^2=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$.

6.364. 1. Пусть числа x_1, x_2 и x_3 служат корнями многочлена ax^3+bx^2+cx+d. В таком случае имеет место тождество

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

1. Воспользоваться этим тождеством для получения формул, связывающих корни и коэффициенты данного многочлена.

2. С помощью формул, полученных в п. 1., найти корни x_1, x_2 и x_3 уравнения $8x^3-20x^2-10x+33=0$, составив и решив новое кубическое уравнение с корнями x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1.

Решение.

1) Раскрывая скобки в правой части данного тождества и приводя подобные члены, получаем искомые формулы (теорема Виета для кубического уравнения):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}. \end{cases}$$

2) Новое кубическое уравнение имеет вид

$$(x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))(x-(x_1+x_3))=0.$$

По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=\frac{5}{2}$, следовательно, получаем

$$\left(x-\frac{5}{2}+x_1\right)\left(x-\frac{5}{2}+x_2\right)\left(x-\frac{5}{2}+x_3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}-x-x_1\right)\left(\frac{5}{2}-x-x_2\right)\left(\frac{5}{2}-x-x_3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)=8y^3-20y^2-10y+33=0,$$

где $y=\frac{5}{2}-x$.

$$8\left(\frac{5}{2}-x\right)^3-20\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-10\left(\frac{5}{2}-x\right)+33=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^3-1)-5(x^2-x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1, \\ x=2\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Так как корни нового уравнения $\frac{5}{2}-x_1, \frac{5}{2}-x_2, \frac{5}{2}-x_3$,

то $\frac{5}{2}-x_1=1, \frac{5}{2}-x_2=2+\sqrt{3}, \frac{5}{2}-x_3=2-\sqrt{3}.$

Ответ: $x_1=1{,}5;\ x_2=0{,}5-\sqrt{3};\ x_3=0{,}5+\sqrt{3}.$

6.365. Решить уравнение $2ax^3-(2a^2+a+2)x^2+(a^2+2a+1)x-a=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения. Так как $x_1x_2x_3=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$, а $x_1x_2=1$, то сразу находим, что $x_3=\frac{1}{2}$. Далее, $x_1+x_2+x_3=\frac{2a^2+a+2}{2a}$, т.е. $x_1+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}=\frac{2a^2+a+2}{2a}$, откуда получаем квадратное уравнение относительно x_1: $ax_1^2-(a^2+1)x_1+a=0$.

Следовательно, $x_1=\frac{a^2+1\pm\sqrt{a^4+2a^2+1-4a^2}}{2a}=\frac{(a^2+1)\pm(a^2-1)}{2a}$,

т.е. $x_1=a$ или $x_1=\frac{1}{a}$ (тогда соответственно $x_2=\frac{1}{a}$ или $x_2=a$). Итак, $x_1=a,\ x_2=\frac{1}{a},\ x_3=\frac{1}{2}$ — искомые корни.

Ответ: $x_1=a,\ x_2=\frac{1}{a},\ x_3=\frac{1}{2}.$

6.366. Составить уравнение с целыми коэффициентами возможно более низкой степени, одним из корней которого было бы число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Решение.

Уравнение $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ имеет корни $\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$. Значит, уравнение $(x^2-2\sqrt{3}x+1)(x^2+2\sqrt{3}x+1)=0 \Leftrightarrow x^4-10x^2+1=0$ имеет корень $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

1) Пусть $ax^2 + bx + c = 0$ — квадратное уравнение с целыми коэффициентами и $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$— его корень.

Тогда

$$a\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+b\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+c=0 \Leftrightarrow a\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+b+c\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+c)\sqrt{3}+(a-c)\sqrt{2}+b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0, \\ a-c=0, \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0.$$

Получается противоречие.

2) Пусть $y^3+ay^2+by+c=0$ — кубическое уравнение с рациональными коэффициентами. Легко заметить, что заменой $y=x-\frac{a}{3}$ оно приводится к уравнению $x^3+px+q=0$, где p,q — рациональные. Если $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ — корень последнего уравнения, то получаем

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3+p\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+q=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+p+q\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=0, \\ \sqrt{3}+\sqrt{2}+p\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+q\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(5+2\sqrt{6}\right)q+pq+q^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=0, \\ \left(5-2\sqrt{6}\right)q+\sqrt{3}+\sqrt{2}+p\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10q+pq+\left(q^2+p+1\right)\sqrt{3}+\left(1-p-q^2\right)\sqrt{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} q^2+p+1=0, \\ -q^2-p+1=0. \end{cases}$$

Получается противоречие.

Таким образом, не существует уравнений второй и третьей степени с целыми коэффициентами, имеющих корень $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Ответ: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

6.367. Показать, что корни уравнения $x + x^{-1} = 2\cos 40°$ являются также корнями уравнения $x^4 + x^{-4} = 2\cos 160°$.

Решение.

Запишем уравнения в виде $x+\frac{1}{x}=2\cos 40°$ и

$$x^4+\frac{1}{x^4}=2\cos160°\Leftrightarrow\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2-2=2\cos160°\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left((2\cos40°)^2-2\right)^2-2=2\cos160°\Leftrightarrow\left(4\cos^2 40°-2\right)^2-2=2\cos160°\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2\cos80°)^2-2=2\cos160°\Leftrightarrow 4\cos^2 80°-2=2\cos160°\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos160°=2\cos160°.$$

Что и требовалось доказать.

6.368. Решить уравнение $x^4-4x^3+3x^2+8x-10=0$, если известно, что два его корня отличаются друг от друга только знаком.

Решение.

Если x_1, x_2 — корни исходного уравнения, которые отличаются только знаком ($x_2=-x_1$), то можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1^4-4x_1^3+3x_1^2+8x_1-10=0,\\ x_1^4+4x_1^3+3x_1^2-8x_1-10=0\end{cases}\Rightarrow 8x_1^3-16x_1=0\Leftrightarrow x_1^2-2=0\,(x_1\neq0).$$

Тогда $x^4-4x^3+3x^2+8x-10=\left(x^2-2\right)\left(x^2-4x+5\right)$

$x^2-4x+5\neq0, D<0.$

Получили $x^2-2=0$, $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$.

6.369. Решить уравнение $2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=0$, если известно, что оно имеет три корня, из которых два являются противоположными числами (противоположными называются два числа, сумма которых равна нулю).

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3 — корни исходного уравнения, где $x_1=-x_2$, тогда запишем систему уравнений:

$$\begin{cases}2x_1^5-x_1^4-2x_1^3+x_1^2-4x_1+2=0,\\ -2x_1^5-x_1^4+2x_1^3+x_1^2+4x_1+2=0\end{cases}\Rightarrow 4x_1^5-4x_1^3-8x_1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^4-x_1^2-2=0\Leftrightarrow\left(x_1^2-2\right)\left(x_1^2+1\right)=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}.$$

Далее,

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2 \\ \underline{2x^5 - 2x - 4x} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^4 - x^2 - 2} \\ 2x - 1. \end{array}
\end{array}
$$

$$
-\begin{array}{r} -x^4 + x^2 + 2 \\ \underline{-x^4 + x^2 + 2} \\ 0 \end{array}
$$

$2x - 1 = 0$ при $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

6.370. Показать, что уравнение $\sqrt{x^4 + x - 2} + \sqrt[4]{x^4 + x - 2} = 6$ имеет единственный положительный корень, и найти этот корень.

Решение.

Пусть $\sqrt[4]{x^4 + x - 2} = y \geq 0$, тогда уравнение имеет вид $y^2 + y - 6 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = 2$. Значение $y_1 = -3$ не подходит, так как $y \geq 0$.

Получили

$$\sqrt[4]{x^4 + x - 2} = 2 \Leftrightarrow x^4 + x - 2 = 16 \Leftrightarrow x^4 + x - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 16) + (x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) + (x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 9) = 0$, откуда $x_1 = 2$. Рассмотрим функцию $z = x^3 + 2x^2 + 4x + 9$ и ее производную $z' = 3x^2 + 4x + 4 > 0$, так как $D = 16 - 48 < 0$.

$z(0) = 5$ и функция z монотонно возрастает при $x \in [0; +\infty)$, так как $z' > 0$, следовательно, $z > 0$ и корней нет.

Ответ: $x = 2$.

Решения к главе 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

Степени с действительными показателями

$$a^0 \equiv 1, \tag{7.1}$$

где 0^0 не имеет смысла;

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n}\,(a \neq 0), \tag{7.2}$$

где n – действительное число;

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m}\,(a \geq 0), \tag{7.3}$$

где m и n – натуральные числа;

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} \equiv a^{\alpha+\beta}, \tag{7.4}$$

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} \equiv a^{\alpha-\beta}, \tag{7.5}$$

$$\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} \equiv a^{\alpha\cdot\beta}, \tag{7.6}$$

где α и β — действительные числа.

Показательная функция

Показательной функцией переменной x называется функция

$$y = a^x,$$

где a – данное число.

Если $a < 0$, то функция a^x определена только при целых и при дробных значениях x (если знаменатель дробного показателя – нечетное число). Если $a = 0$, то выражение 0^x определено при $x > 0$. Если $a > 0$, то функция a^x определена при всех действительных значениях x, причем при $a = 1$ имеем $1^x = 1$, т.е. функция равна постоянному.

В дальнейшем показательную функцию a^x будем рассматривать при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Основные свойства показательной функции *$y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$:*

1. Показательная функция определена при всех действительных значениях x $(x \in R)$.

2. Областью изменения показательной функции служит множество всех положительных действительных чисел, т.е. $y \in (0, +\infty)$.

3. При $a > 1$ показательная функция строго возрастает, т.е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $a^{x_1} < a^{x_2}$. Причем если $x \in (-\infty; 0)$, то $y \in (0; 1)$; если $x = 0$, то $y = 1$; если $x \in (0; \infty)$, то $y \in (1; +\infty)$, т.е. если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; $y \to 0$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. При $a \in (0; 1)$ показательная функция строго убывает, т.е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$. Причем если $x \in (-\infty; 0)$, то $y \in (1; +\infty)$; если $x = 0$, то $y = 1$; если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (0; 1)$, т.е. если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to 0$ при $x \to +\infty$.

5. Характеристическое свойство: значение показательной функции от суммы равно произведению значений этой функции от слагаемых, т.е.

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b: $\log_a b = x$, если $a^x = b$, или

$$a^{\log_a b} = b. \tag{7.7}$$

В дальнейшем основание логарифмов будем считать положительным и отличным от единицы $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Приведем некоторые свойства логарифмов (при любом положительном основании, отличном от единицы).

1. Логарифм единицы равен нулю, т.е. $\log_a 1 = 0$.

2. Логарифм основания равен единице, т.е. $\log_a a = 1$.

3. Для любого положительного числа b существует, и притом только одно, такое действительное число α, что $\log_a b = \alpha$.

4. Из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ следует $x_1 = x_2$ (и наоборот).

Основные правила логарифмирования

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c. \tag{7.8}$$

Замечание. Логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 ... b_n) \equiv \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + ... + \log_a |b_n| \quad (b_1 \cdot b_2 ... b_n > 0). \tag{7.9}$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \tag{7.10}$$

Замечание. Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} \equiv \log_a |b| - \log_a |c| \quad (b \cdot c > 0). \tag{7.11}$$

3. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм ее основания (логарифмы взяты по тому же основанию), т.е.

$$\log_a b^c = c \log_a b. \tag{7.12}$$

Замечание. Логарифм положительной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля ее основания, взятый по тому же основанию, т.е.

$$\log_a b^c \equiv c\log_a|b| \quad \left(b^c > 0\right). \tag{7.13}$$

Формулы перехода от одного основания логарифма к другому

1. Логарифм числа по данному основанию равен логарифму этого числа по новому основанию, деленному на логарифм данного основания по новому основанию, т.е.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \tag{7.14}$$

Множитель $\dfrac{1}{\log_b a}$ называется *модулем перехода.*

2. Из формулы (7.14) при $N = b$ получаем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{7.15}$$

3. Часто в логарифмических преобразованиях пользуются тождествами

$$\log_{a^k} N \equiv \frac{1}{k}\log_{|a|} N \quad \left(a^k > 0\right) \tag{7.16}$$

и

$$\log_{a\cdot b} N \equiv \frac{\log_{|a|} N}{1+\log_{|a|}|b|} \quad (ab > 0). \tag{7.17}$$

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$ и x - независимая переменная.

По определению логарифма выражение $y = \log_a x$ означает то же, что и выражение $a^y = x$, т.е. логарифмическая функция есть обратная функция по отношению к показательной.

Основные свойства логарифмической функции

1. Логарифмическая функция определена при всех положительных действительных значениях x (нуль и отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют).

2. Областью изменения логарифмической функции служит множество всех действительных чисел $y\in(-\infty;+\infty)$.

3. При $a>0$ логарифмическая функция возрастает, т.е. если $0<x_1<x_2$, то $\log_a x_1<\log_a x_2$. Причем если $x\in(0;1)$, то $y\in(-\infty;0)$; если $x=1$, то $y=0$; если $x\in(1;+\infty)$, то $y\in(0;+\infty)$, т.е. если $x\in(0;+\infty)$, то $y\in(-\infty;+\infty)$; $y\to-\infty$ при $x\to 0$ и $y\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

4. При $0<a<1$ логарифмическая функция убывает, т.е. если $0<x_1<x_2$, то $\log_a x_1>\log_a x_2$. Причем если $x\in(0;1)$, то $y\in(0;+\infty)$; если $x=1$, то $y=0$; если $x\in(1;+\infty)$, то $y\in(-\infty;0)$, т.е. если $x\in(0;+\infty)$, то $y\in(-\infty;+\infty)$; $y\to-\infty$ при $x\to+\infty$ и $y\to+\infty$ при $x\to 0$.

5. Характеристическое свойство: значение логарифмической функции от произведений двух положительных чисел равно сумме значений функции от каждого из чисел:

$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$.

Показательные уравнения

Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени.

Рассмотрим несколько типов показательных уравнений, решаемых методами элементарной математики.

Показательные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения при решении показательных уравнений в общем случае обязательна.

1. Уравнение вида

$$a^x=b \tag{7.18}$$

называется *простейшим показательным*.

Рассмотрим уравнение (7.18) при $a>0$ и $a\neq 1$. Если $b>0$, то уравнение имеет единственное решение $x=\log_a b$. Если $b\leq 0$, то уравнение решений не имеет.

2. Показательное уравнение вида

$$a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)}, \tag{7.19}$$

где $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ — заданные элементарные функции, логарифмированием приводится к виду

$$f_1(x)\log_c a = f_2(x)\log_c b.$$

Если последнее уравнение решается методами элементарной математики, то тем самым решается уравнение (7.19).

Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестные только под знаком логарифма.

Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является обязательной.

1. Уравнение вида

$$\log_a x = b, \tag{7.20}$$

где x – неизвестное, а a и b – заданные числа, называется *простейшим логарифмическим.*

Если $a>0$ и $a\neq 1$, то такое уравнение при любом действительном значении b имеет единственное решение

$$x = a^b. \tag{7.21}$$

2. Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x), \tag{7.22}$$

где $a>0$ и $a\neq 1$, после потенцирования приводится к виду

$$f_1(x) = f_2(x). \tag{7.23}$$

Корнями уравнения (7.22) будут только те корни уравнения (7.23), при которых $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$, т.е. корни, принадлежащие к области определения уравнения (7.22).

3. Логарифмические уравнения вида

$$f(\log_a \psi(x)) = 0, \tag{7.24}$$

где $f(t)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции, заменой $\log_a \psi(x) = t$ приводятся к уравнению $f(t)=0$.

Показательно-логарифмические уравнения

Если неизвестное в уравнении входит в показатель степени и под знак логарифма или в основание логарифма, то такое уравнение называют *показательно-логарифмическим.*

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решают, логарифмируя обе части уравнения, и приводят их к логарифмическим уравнениям.

При решении систем показательных и логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (подстановки, алгебраического сложения, введения новых неизвестных и др.).

Упростить выражения (**7.295–7.299**):

7.295. $$\frac{\left(\lg b\cdot 2^{\log_2 \lg b}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \lg^{-\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\frac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0,5\lg\lg b^{\frac{1}{2}}}}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\lg b > 0 \Leftrightarrow b > 1$

$$\frac{\left(\lg b\cdot 2^{\log_2 \lg b}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \lg^{-\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\frac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0,5\lg\lg b^{\frac{1}{2}}}}}=\frac{(\lg b\cdot\lg b)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\lg^{\frac{1}{2}} b^2}}{\sqrt{\frac{\lg^2 b+2\lg b+1}{2\lg b}-10^{\lg\left(\lg b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}}}=$$

$$=\frac{\lg b\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\lg^{\frac{1}{2}} b}}{\sqrt{\frac{(\lg b+1)^2}{2\lg b}-\left(\lg b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}}=\frac{\frac{\lg^{\frac{1}{2}} b}{\sqrt{2}}}{\frac{\lg b+1}{\sqrt{2\lg b}}-\left(\frac{1}{2}\lg b\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{\lg b}}{\sqrt{2}}}{\frac{\lg b+1-\lg b}{\sqrt{2\lg b}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lg b}\cdot\sqrt{2\lg b}}{\sqrt{2}}=\lg b.$$

Ответ: $\lg b$, где $b > 1$.

7.296. $2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\left(\log_a\sqrt[4]{ab}+\log_b\sqrt[4]{ab}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\log_a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}+\log_b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$,

если $a > 1$ и $b > 1$.

Решение.

$$2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\left(\log_a\sqrt[4]{ab}+\log_b\sqrt[4]{ab}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\log_a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}+\log_b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log_a b+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log_b a\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{4}\log_a b-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log_b a-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\log_a b}{4}+\frac{1}{4\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_a b}{4}+\frac{1}{4\log_a b}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\left(\frac{\log_a^2 b+2\log_a b+1}{4\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_a^2 b-2\log_a b+1}{4\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\left(\frac{(\log_a b+1)^2}{4\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{(\log_a b-1)^2}{4\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=2\log_a^{\frac{1}{2}} b\left(\frac{|\log_a b+1|}{2\log_a^{\frac{1}{2}} b}-\right.$$

$$\left.-\frac{|\log_a b-1|}{2\log_a^{\frac{1}{2}} b}\right)=|\log_a b+1|-|\log_a b-1|.$$

Полученное выражение с учетом $a > 1$ и $b > 1$ равносильно двум:

1) $\begin{cases}0<\log_a b<1,\\ \log_a b+1+\log_a b-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<b<a,\\ 2\log_a b;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_a b\ge 1,\\ \log_a b+1-\log_a b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<b\le a,\\ 2.\end{cases}$

Ответ: 2, если $1<a\le b$, и $2\log_a b$, если $1<b<a$.

7.297. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np} p)\cdot\sqrt{\log_n p}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\log_n p>0,\\ 0<n\neq 1,\\ 0<p\neq 1,\ np\neq 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<n<1,\\ 0<p<1\end{cases}$ или $\begin{cases}n>1,\\ p>1.\end{cases}$

$$\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np} p)\cdot\sqrt{\log_n p}=$$

$$=\sqrt{\log_n p+\frac{1}{\log_p n}+2}\cdot\left(\log_n p-\frac{\log_n p}{1+\log_n p}\right)\cdot\sqrt{\log_n p}=$$

$$=\sqrt{\log_n^2 p+2\log_n p+1}\cdot\frac{\log_n^2 p}{1+\log_n p}=\sqrt{(\log_n p+1)^2}\cdot\frac{\log_n^2 p}{\log_n p+1}=\log_n^2 p.$$

Ответ: $\log_n^2 p$, где $\begin{cases}0<n<1,\\ 0<p<1\end{cases}$ или $\begin{cases}n>1,\\ p>1.\end{cases}$

7.298. $\left(\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}} b$, при $a>1$.

Решение.

$$\left(\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}} b=$$

$$=\left(\left(\frac{\log_a^2 b-2\log_a b+1}{2\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_a^2 b+2\log_a b+1}{2\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}} b=$$

$$=\left(\left(\frac{(\log_a b-1)^2}{2\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{(\log_a b+1)^2}{2\log_a b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}} b=|\log_a b-1|-(\log_a b+1).$$

Раскрывая модуль, имеем 2 случая:

1) $\begin{cases}\log_a b-1<0,\\ -\log_a b+1-\log_a b-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a b<1,\\ -2\log_a b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<b<a,\\ -2\log_a b;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_a b-1\ge 0,\\ \log_a b-1-\log_a b-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a b\ge 1,\\ -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge a>1,\\ -2.\end{cases}$

Ответ: -2, если $1<a\le b$, и $-2\log_a b$, если $1<b<a$.

7.299. $\dfrac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{\left(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b)\right)^{1/2}}$.

Решение.

$$\frac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{\left(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b)\right)^{1/2}}=$$

$$=\frac{1+\log_a(a-b)^{-2}+\log_a^2(a-b)}{\left(1-2\log_a(a-b)+\log_a^2(a-b)\right)^{1/2}}=\frac{1-2\log_a(a-b)+\log_a^2(a-b)}{|1-\log_a(a-b)|}=$$

$$=\frac{(1-\log_a(a-b))^2}{|1-\log_a(a-b)|}.$$

Раскрывая модуль в полученном выражении, получаем два случая:

1) $\begin{cases}1-\log_a(a-b)<0,\\ \dfrac{(1-\log_a(a-b))^2}{-(1-\log_a(a-b))}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a(a-b)>1,\\ \log_a(a-b)-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-b>a,\\ a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}a-b<a,\\ 0<a<1,\end{cases}\end{array}\right.\\ \log_a(a-b)-1,\\ a-b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b<0,\\ a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}b>0,\\ 0<a<1,\end{cases}\end{array}\right.\\ \log_a(a-b)-1,\\ b<a.\end{cases}$$

2) $\begin{cases} 1-\log_a(a-b)>0, \\ \dfrac{(1-\log_a(a-b))^2}{1-\log_a(a-b)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(a-b)<1, \\ 1-\log_a(a-b) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-b<a, \\ a>1, \end{cases} \\ \begin{cases} a-b>a, \\ 0<a<1, \end{cases} \end{array}\right. \\ 1-\log_a(a-b), \\ a-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b>0, \\ a>1, \end{cases} \\ \begin{cases} b<0, \\ 0<a<1, \end{cases} \end{array}\right. \\ 1-\log_a(a-b), \\ b<a. \end{cases}$$

Ответ: $1-\log_a(a-b)$, если $\begin{cases} 0<a<1, \\ b<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a>1, \\ 0<b<a, \end{cases}$

и $\log_a(a-b)-1$, если $0<b<a<1$ или $\begin{cases} a>1, \\ b<0. \end{cases}$

7.300. Заметив, что $675 = 9 \cdot 75$, а $135 = 3 \cdot 45$, дать без помощи таблиц ответ на вопрос о том, какое число больше: $\log_{135} 675$ или $\log_{45} 75$.

Решение:

$$\log_{135} 675 = \frac{\log_{45} 675}{\log_{45} 135} = \frac{\log_{45}(9 \cdot 75)}{\log_{45}(3 \cdot 45)} = \frac{\log_{45} 9 + \log_{45} 75}{\log_{45} 3 + 1},$$

$$\log_{135} 675 - \log_{45} 75 = \frac{\log_{45} 9 + \log_{45} 75}{\log_{45} 3 + 1} - \log_{45} 75 =$$

$$= \frac{\log_{45} 9 + \log_{45} 75 - \log_{45} 3 \cdot \log_{45} 75 - \log_{45} 75}{\log_{45} 3 + 1} = \frac{\log_{45} 3 \cdot (2 - \log_{45} 75)}{\log_{45} 3 + 1} =$$

$$= \frac{\log_{45} 3 \cdot \log_{45} \dfrac{45^2}{75}}{\log_{45} 3 + 1} = \frac{\log_{45} 3 \cdot \log_{45} 27}{\log_{45} 3 + 1} = \frac{3 \log_{45}^2 3}{\log_{45}(3 \cdot 45)} = \frac{3 \log_{45}^2 3}{\log_{45} 135} > 0.$$

Значит, $\log_{135} 675 > \log_{45} 75$.

7.301. Уравнение $4^x+10^x=25^x$ имеет единственный корень. Найти его и выяснить: положителен ли он или отрицателен; больше или меньше единицы.

Решение.

Разделив уравнение на $25^x\neq 0$, получим $\left(\frac{4}{25}\right)^x+\left(\frac{10}{25}\right)^x=1$,

$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{5}\right)^x-1=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\left(\frac{2}{5}\right)^x$, имеем $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0, \varnothing$;

$\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)^x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\log_{0,4}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ: $\log_{0,4}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $0<\log_{0,4}\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$.

7.302. Показать, что $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$.

Решение.

$\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1=\log_3 7\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 7}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}+1=$

$=\log_3 4+1=\log_3 4+\log_3 3=\log_3(4\cdot 3)=\log_3 12.$

7.303. Выражение $\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\cdot\log_m A$ представить в виде произведения.

Решение.

Перейдем к основанию A. Имеем

$$\frac{\log_A A}{\log_A m}\cdot\frac{\log_A A}{\log_A n}+\frac{\log_A A\cdot\log_A A}{\log_A n\cdot\log_A p}+\frac{\log_A A\cdot\log_A A}{\log_A p\cdot\log_A m}=\frac{1}{\log_A m\cdot\log_A n}+$$

$$+\frac{1}{\log_A n\cdot\log_A p}+\frac{1}{\log_A p\cdot\log_A m}=\frac{\log_A m+\log_A n+\log_A p}{\log_A m\cdot\log_A n\cdot\log_A p}=$$

$$=\frac{\log_A mnp}{\log_A m\cdot\log_A n\cdot\log_A p}.$$ Так как $\log_A m=\frac{1}{\log_m A}, \log_A n=\frac{1}{\log_n A},$

$\log_A p=\frac{1}{\log_p A}$, то $\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+$

$$+\log_p A\cdot\log_m A=\frac{\log_A(mnp)}{\frac{1}{\log_m A}\cdot\frac{1}{\log_n A}\cdot\frac{1}{\log_p A}}=$$

$$=\log_m A\cdot\log_n A\cdot\log_p A\cdot\log_A(mnp).$$

7.304. Показать, что $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\frac{1}{3}$.

Решение.

Перейдем к основанию 3. Имеем

$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=$

$$=\log_3 2\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 6}\cdot\frac{\log_3 6}{\log_3 7}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 8}=\log_3 2\cdot\frac{1}{3\log_3 2}=\frac{1}{3}.$$

7.305. Упростить выражение $\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}$

при $1<a<b$.

Решение.

$$\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(\frac{1}{\log_a^4 b}+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left(\frac{\log_a^8 b+2\log_a^4 b+1}{\log_a^4 b}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(\frac{\left(\log_a^4 b+1\right)^2}{\log_a^4 b}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{\log_a^4 b+1}{\log_a^2 b}-2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\log_a^4 b-2\log_a^2 b+1}{\log_a^2 b}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\left(\log_a^2 b-1\right)^2}{\log_a^2 b}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\log_a^2 b-1}{\log_a b}=\log_a b-\frac{1}{\log_a b}=\log_a b-\log_b a.$$

Ответ: $\log_a b-\log_b a$.

7.306. При каких значениях p уравнение $\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$ имеет единственный корень?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+2px>0, \\ 8x-6p-3>0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$\lg(x^2+2px)=\lg(8x-6p-3)$. Учитывая ОДЗ, имеем

$x^2+2px=8x-6p-3$, $x^2+2(p-4)x+6p+3=0$.

Отсюда находим $x_{1,2}=4-p\pm\sqrt{p^2-14p+13}$. Единственный корень квадратное уравнение имеет, когда дискриминант $D=p^2-14p+13=0$, т.е. при $p=1$ или $p=13$. При $p=1$ $x_1=x_2=3$; при $p=13$ $x_1=x_2=-11$.

При подстановке значений $p=1$ и $x=3$ в начальное уравнение получим $\lg 15=\lg 15$, т.е. верное равенство, а при подстановке $p=13$ и $x=-11$ получим $\lg(-165)=\lg(-169)$, $\varnothing$. Таким образом, данное уравнение имеет единственный корень $x=3$ при $p=1$.

Два различных корня $x_1=4-p-\sqrt{p^2-14p+13}$ и $x_2=4-p+\sqrt{p^2-14p+13}$ уравнение имеет при $D=p^2-14p+13>0$, т.е. при $p\in(-\infty;1)\cup(13;\infty)$.

При подстановке значений x_1 и x_2 в ОДЗ убеждаемся, что $x_1=4-p-\sqrt{p^2-14p+13}$ не удовлетворяет ОДЗ, а $x_2=4-p+\sqrt{p^2-14p+13}$ удовлетворяет ОДЗ при $p\in\left[-\frac{1}{2};-\frac{3}{22}\right]$.

Таким образом, данное уравнение имеет еще единственный

корень $x = 4 - p + \sqrt{p^2 - 14p + 13}$ при $p \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$.

Ответ: при $p = 1$ $x = 3$;

при $p \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$ $x = 4 - p + \sqrt{p^2 - 14p + 13}$.

7.307. При каких значениях a уравнение $2\lg(x+3) = \lg(ax)$ имеет единственный корень?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x + 3 > 0, \\ ax > 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде $\lg(x+3)^2 = \lg(ax) \Rightarrow (x+3)^2 = ax \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (6-a)x + 9 = 0$, откуда $x_{1,2} = \dfrac{a - 6 \pm \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$.

Единственный корень квадратное уравнение имеет, когда дискриминант

$D = a^2 - 12a = 0$, т. е. при $a = 0$ или $a = 12$. При $a = 0$ $x_1 = x_2 = -3$;
при $a = 12$ $x_1 = x_2 = 3$.

Подставляя $a = 0$ и $x = -3$ в уравнение, имеем $\lg 0 = \lg 0, \varnothing$; а при подстановке $a = 12$ и $x = 3$ получим $\lg 36 = \lg 36$, т. е. истинное равенство. Таким образом, данное уравнение имеет единственный корень $x = 3$ при $a = 12$.

Два различных корня $x_1 = \dfrac{a - 6 - \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$

квадратное уравнение имеет при $D = a^2 - 12a > 0$,

т. е. при $a \in (-\infty; 0) \cup (12; \infty)$.

$x_1 = \dfrac{a - 6 - \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$ не удовлетворяет ОДЗ,

а $x_2 = \dfrac{a - 6 + \sqrt{a^2 - 12a}}{2}$ удовлетворяет ОДЗ при $a < 0$.

Отсюда следует, что исходное уравнение имеет еще единственный корень $x=\frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$ при $a\in(-\infty;\ 0)$.

Ответ: при $a=12$ $x=3$; при $a\in(-\infty;\ 0)$ $x=\frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

7.308. Найти $x(x\in Z)$, если $(\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt[3]{4})^x=13{,}5$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\right)^x=\frac{27}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1+2}{\sqrt[3]{2}}\right)^x=\frac{27}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^x=\frac{27}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{x}{3}}=\frac{27}{2}$. Тогда $\frac{x}{3}=1$, $x=3$.

Ответ: 3.

Решить уравнения (**7.309–7.333**):

7.309. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем уравнение в виде $\frac{\log_3^2 x}{2}-\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_3 x\left(\frac{\log_3 x}{2}-\log_3(\sqrt{2x+1}-1)\right)=0$, откуда $\log_3 x=0$, $x_1=1$, или

$\frac{\log_3 x}{2}-\log_3(\sqrt{2x+1}-1)=0\Leftrightarrow\log_3\sqrt{x}=\log_3(\sqrt{2x+1}-1)\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}-1$.

Возведя в квадрат обе части этого уравнения, имеем $x=2x+1-2\sqrt{2x+1}+$ $+1\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=x+2$.

После возведения в квадрат получим

$8x+4=x^2+4x+4\Leftrightarrow x^2-4x=0$, откуда $x_2=0, x_3=4$; $x_2=0$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 1; 4.

7.310. $\left(1+\log_x \frac{4-x}{10}\right)\cdot \lg x = \lg\lg 10^3 - 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 4-x>0, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<4, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Перейдем к основанию 10. Получаем

$$\left(1+\frac{\lg\frac{4-x}{10}}{\lg x}\right)\lg x = \lg 3 - 1 \Leftrightarrow \lg x + \lg\frac{4-x}{10} = \lg 3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x + \lg(4-x) - 1 = \lg 3 - 1 \Leftrightarrow \lg x + \lg(4-x) = \lg 3 \Rightarrow \lg x(4-x) = \lg 3,$$

$x(4-x)=3,\ x^2-4x+3=0.$ Тогда $x_1=1,\ x_2=3;\ x_1=1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 3.

7.311. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x\neq \frac{1}{4}, \\ x\neq \frac{1}{16}. \end{cases}$

Перейдем к основанию 4. Тогда $\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{1+\log_4 x} +$

$$+\frac{3}{2+\log_4 x} = 0 \Leftrightarrow 4\log_4^2 x + 8\log_4 x + 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\log_4 x$,

получим $(\log_4 x)_1 = -\frac{3}{2}$ или $(\log_4 x)_2 = -\frac{1}{2}$, откуда $x_1=\frac{1}{8}, x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}$.

7.312. $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-0,5}=3^{\log_{16}x+0,5}-2^{2^{\log_{16}x-1}}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Запишем уравнение в виде $4^{\log_{16}x}+\dfrac{4^{\log_{16}x}}{2}=$

$$=\sqrt{3}\cdot 3^{\log_{16}x}+\frac{3^{\log_{16}x}}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot 4^{\log_{16}x}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 3^{\log_{16}x}\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{16}x}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\log_{16}x}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Тогда $\log_{16}x=\dfrac{3}{2}, x=64$.

Ответ: 64.

7.313. $\log_{x+1}\left(x^3-9x+8\right)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+1>0,\\ x+1\neq 1,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1,\\ x^3-9x+8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ x\neq 0,\\ x>1,\\ x\neq 2,\\ x^3-9x+8>0.\end{cases}$

Из условия имеем

$\log_{x+1}\left(x^3-9x+8\right)=3\log_{x+1}(x-1)\Leftrightarrow\log_{x+1}\left(x^3-9x+8\right)=\log_{x+1}(x-1)^3$,

$x^3-9x+8=(x-1)^3\Leftrightarrow x^3-9x+8=x^3-3x^2+3x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0, x_1=1$, что не подходит по ОДЗ, и $x_2=3$.

Ответ: 3.

7.314. $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}8-x>0,\\ x+2>0,\\ x+2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<8,\\ x>-2,\\ x\neq -1.\end{cases}$

Перейдем к основанию 12. Тогда

$$\frac{\log_{12}144-\log_{12}16-\log_{12}(x+2)}{\log_{12}(x+2)}=\frac{\log_{12}(8-x)}{\log_{12}(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_{12}\frac{144}{16(x+2)}=\log_{12}(8-x)\Rightarrow\frac{144}{16(x+2)}=8-x\Leftrightarrow\frac{9}{x+2}=8-x\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-6x-7=0, x_1=-1$, что не подходит по ОДЗ, и $x_2=7$.

Ответ: 7.

7.315. $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot 0{,}25^{\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}}-1=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0.\end{cases}$

Используя формулы $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ при $\alpha\neq\pi+2\pi n, n\in Z$

и $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$, перепишем уравнение в виде

$$2^{\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}}-2\cdot 2^{\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos 2x}}-1=0\Leftrightarrow 2\cdot\left(2^{\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}}\right)^2+2^{\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}}-1=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $2^{\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}}$,

имеем $2^{\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}}=-1, \varnothing$; и $2^{\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}}=2^{-1}\Leftrightarrow\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x}=-1\Leftrightarrow\cos 2x-$

$-\sin 2x+1=0\Leftrightarrow\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow\cos x(\cos x-\sin x)=0.$ Отсюда

1) $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in Z;$

2) $\cos x - \sin x = 0$.

$\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in Z,$ что не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in Z$.

7.316. $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg \lg p$. **При каких значениях p уравнение имеет решение?**

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 2 - x > 0, \\ \lg p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ p > 1. \end{cases}$$

Из условия получаем $\lg 2x(2-x) = \lg \lg p \Rightarrow 2x(2-x) = \lg p$,

$2x^2 - 4x + \lg p = 0$. Тогда $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2\lg p}}{2}$ при $4 - 2\lg p \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg p \le 2,\ p \le 100$.

Учитывая ОДЗ, имеем $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2\lg p}}{2}$, где $1 < p \le 100$.

Ответ: $\frac{2 - \sqrt{4 - 2\lg p}}{2};\ \frac{2 + \sqrt{4 - 2\lg p}}{2}$, где $p \in (1; 100]$.

7.317. $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} = 1$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \le 1$.

Перейдем к основанию 2. Получаем $\frac{\log_2 x}{2} + \frac{1}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{4} -$

$-1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 4 = 0, (\log_2 x - 2)^2 = 0, \log_2 x = 2, x = 4.$

Ответ: 4.

7.318. $\log_k x + \log_{\sqrt{k}} x + \log_{\sqrt[3]{k}} x + \ldots + \log_{\sqrt[k]{k}} x = \frac{k+1}{2};\ (k \in N)$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} k \ne 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Перейдем к основанию k. Имеем

$$\log_k x + 2\log_k x + 3\log_k x + ... + k\log_k x = \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow (1+2+3+$$

$$+...+k)\log_k x = \frac{k+1}{2},\ \frac{1+k}{2}\cdot k\cdot\log_k x = \frac{k+1}{2},\ \log_k x = \frac{1}{k} \Rightarrow x = \sqrt[k]{k}.$$

Ответ: $\sqrt[k]{k}$, $k = 2; 3; 4;...$

7.319. $2 - \log_{b^2}(1+x) = 3\log_b\sqrt{x-1} - \log_{b^4}(x^2-1)^2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 1+x>0, \\ x-1>0, \\ b>0, \\ b\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ 0<b\neq 1. \end{cases}$

Перейдем к основанию b. Тогда $2 - \frac{\log_b(x+1)}{2} =$

$$= \frac{3\log_b(x-1)}{2} - \frac{\log_b(x^2-1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - \log_b(x+1) = 3\log_b(x-1) - \log_b(x-1) - \log_b(x+1),\ \log_b(x-1) = 2,$$

откуда $x-1=b^2$, $x=b^2+1$.

Ответ: b^2+1, где $0<b\neq 1$.

7.320. $m^{1+\log_3 x} + m^{1-\log_3 x} = m^2+1$ $(m>0,\ m\neq 1)$.

Решение.
ОДЗ: $x>0$.

Запишем уравнение в виде $m\cdot m^{\log_3 x} + \frac{m}{m^{\log_3 x}} - (m^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m(m^{\log_3 x})^2 - (m^2+1)m^{\log_3 x} + m = 0.$$

Решив его как квадратное уравнение относительно $m^{\log_3 x}$, получим $m^{\log_3 x} = m^{-1}$ или $m^{\log_3 x} = m$, откуда $\log_3 x = -1$, $x_1 = \frac{1}{3}$; $\log_3 x = 1$, $x_2 = 3$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; 3.

7.321. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Из условия имеем

1) $\begin{cases}|x-1|=1,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

2) $\begin{cases}0<|x-1|\neq 1,\\ \lg x^2-2\lg x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq 1,\\ x\neq 2,\\ \left[\begin{array}{l}\lg x=-1,\\ \lg x=2.\end{array}\right.\end{cases}$

Получим $x_1=\dfrac{1}{10}$; $x_2=1000$; $x_3=2$.

Ответ: 0,1; 2; 1000.

7.322. $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1, (a>0)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ 6-x>0,\end{cases}\ 0<x<6.$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$\lg a^{2\lg x-\lg(6-x)}=\lg 1\Leftrightarrow(2\lg x-\lg(6-x))\lg a=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\lg x-\lg(6-x)=0$ или $\lg a=0$.

Отсюда $2\lg x=\lg(6-x)\Leftrightarrow\lg x^2=\lg(6-x), x^2=6-x,$

$x^2+x-6=0, x_1=-3$ (это значение не подходит по ОДЗ), $x_2=2$. Из второго уравнения получим $a=1$ при $0<x<6$.

Ответ: 2, если $0<a\neq 1$; $(0;6)$, если $a=1$.

7.323. $p^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)}=p^6, (p>0)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+14>0,\\ x+2>0\end{cases}$ или $x>-2$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, имеем

$$\log_2 p^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)} = \log_2 p^6 \Leftrightarrow (\log_2(x+14)+\log_2(x+2))\log_2 p =$$

$$=6\log_2 p \Leftrightarrow \log_2(x+14)(x+2)\log_2 p - 6\log_2 p = 0,$$

$$(\log_2(x^2+16x+28)-6)\log_2 p = 0 \Rightarrow \log_2(x^2+16x+28)-6=0,$$

или $\log_2 p = 0$.

Из первого уравнения получаем

$$\log_2(x^2+16x+28)=6, x^2+16x+28=64, x^2+16x-36=0,$$

$x_1=-18$ (не подходит по ОДЗ), $x_2=2$.

Из второго уравнения имеем $p=1$.

Ответ: 2, если $p \neq 1$, и $(-2;\infty)$, если $p=1$.

7.324. $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1.$

Решение.

Корнями уравнения является совокупность решений уравнения $x^2-x-1=1$ и решений системы

$$\begin{cases} 0 < x^2-x-1 \neq 1, \\ x^2-1=0. \end{cases}$$

Из уравнения $x^2-x-2=0$ получаем

$x_1=-1, x_2=2$. Из уравнения $x^2-1=0$ имеем $x_3=-1, x_4=1$.

Ответ: $-1; 1; 2$.

7.325. $(2^x-2\cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x}=1.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 3, имеем

$$\log_3(2^x-2\cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x}=\log_3 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\log_3(2x+3)}{2}-\log_3 x\right)\times$$

$\times\log_3(2^x-2\cdot 2^{-x})=0$. Отсюда

1) $\dfrac{\log_3(2x+3)}{2}-\log_3 x=0,$

2) $\log_3\left(2^x-2\cdot2^{-x}\right)=0$.

1) $\log_3(2x+3)=2\log_3 x \Leftrightarrow \log_3(2x+3)=\log_3 x^2, 2x+3=x^2$,

$x^2-2x-3=0$, откуда найдем $x_1=-1$ (не подходит по ОДЗ), $x_2=3$.

2) $2^x-2\cdot2^{-x}=1 \Leftrightarrow 2^x-2\cdot2^{-x}-1=0$.

$2^{2x}-2^x-2=0$, откуда, решая его как квадратное относительно 2^x, имеем $2^x=-1, \varnothing$; $2^x=2, x_3=1$.

Ответ: 1; 3.

7.326. $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq3$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, находим

$\lg|x-3|^{x^2-x}=\lg(x-3)^2 \Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\lg|x-3|=2\lg|x-3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\lg|x-3|-2\lg|x-3|=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\lg|x-3|=0$.

Тогда 1) $x^2-x-2=0$, 2) $\lg|x-3|=0$.

Из первого уравнения получаем $x_1=-1, x_2=2$.

Из второго имеем $|x-3|=1$, откуда

$x-3=-1$ или $x-3=1$. Тогда $x_3=2, x_4=4$.

Ответ: –1; 2; 4.

7.327. $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=8\log_{x+12} x$

(ограничиться отысканием целого корня).

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq1$.

Перейдем к основанию x. Получаем $2\log_x(x+12)=\dfrac{8}{\log_x(x+12)}$.

$\log_x^2(x+12)=4$. Отсюда 1) $\log_x(x+12)=2$, 2) $\log_x(x+12)=-2$.

Тогда 1) $x+12=x^2$, 2) $x+12=\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) $x^2-x-12=0$, откуда $x_1=-3$ (не подходит по ОДЗ), $x_2=4$;

2) $x^3+12x^2-1=0$. Уравнение $x^3+12x^2-1=0$ целых корней не имеет.

Ответ: 4.

7.328. $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5,(3)\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5(\lg x-2)}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Так как $5,(3)=5\frac{3}{9}=5\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$, то уравнение имеет вид

$$5^{\lg x}-3^{\lg x}=\frac{16}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot\frac{5^{0,5\lg x}}{5}\Leftrightarrow 5^{\lg x}-3^{\lg x}-\frac{16}{15}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5\lg x}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 15\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x}-16\left(\frac{5}{3}\right)^{0,5\lg x}-15=0$. Решая его как квадратное относительно $\left(\frac{5}{3}\right)^{0,5\lg x}$, получаем $\left(\frac{5}{3}\right)^{0,5\lg x}=-\frac{3}{5},\varnothing$;

$\left(\frac{5}{3}\right)^{0,5\lg x}=\frac{5}{3}$, откуда $0,5\lg x=1$, $\lg x=2$. Тогда $x=100$.

Ответ: 100.

7.329. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|$.

Решение.

ОДЗ: $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$.

Корнями уравнений $\log_2(3x-1)-\log_2 3=0$ и $\log_2(5-2x)-1=0$ являются числа $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Учитывая ОДЗ, рассмотрим следующие три случая:

1) $\begin{cases}\frac{1}{3}<x<\frac{4}{3},\\ -\log_2(3x-1)+\log_2 3=\log_2(5-2x)-1\Rightarrow x_1=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{4}{3}\le x<\frac{3}{2},\\ \log_2(3x-1)-\log_2 3=\log_2(5-2x)-1\Rightarrow x_2=\frac{17}{12};\end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{2} \le x < \dfrac{5}{2}, \\ \log_2(3x-1) - \log_2 3 = -\log_2(5-2x) + 1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{11}{6}. \end{cases}$

$x_1 = 1, x_2 = \dfrac{17}{12}, x_3 = \dfrac{11}{6}.$

Ответ: $1; \dfrac{17}{12}; \dfrac{11}{6}.$

7.330. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}.$

Решение.

Из условия имеем $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} - 4 = 0.$

$\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}\right)^2 - 4\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} + 1 = 0.$ Решая это уравнение как квадратное относительно $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}$, получаем

1) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, 2) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} = 2+\sqrt{3}$. Тогда

1) $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0, x_{1,2} = 1;$

2) $x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0, x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}.$

Ответ: $1-\sqrt{2}; 1; 1+\sqrt{2}.$

7.331. $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \dfrac{x}{3}} - 2\log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3.$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \ne 3.$

Из условия имеем $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 x - 1} - \log_3 x + \log_3^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_3 x$, получим $\log_3 x = -1$ или $\log_3 x = 2$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 9$.

Ответ: $\frac{1}{3}; 9$.

7.332. $\log_{x+3}\left(3-\sqrt{1-2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ 3-\sqrt{1-2x+x^2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<4.$

Из условия получаем $3-\sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{(1-x)^2}=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 3-|1-x|=\sqrt{x+3}$. Раскрывая модуль, рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} 1-x<0, \\ 3+1-x=\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \sqrt{x+3}=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x^2-9x+13=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-x\geq 0, \\ 3-1+x=\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1, \\ \sqrt{x+3}=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1, \\ x^2+3x+1=0. \end{cases}$

Решив их с учетом ОДЗ, находим $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{9-\sqrt{29}}{2}$.

Ответ: $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{9-\sqrt{29}}{2}$.

7.333. $\sqrt{\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 1$.

Логарифмируем и перейдем к основанию 2. Имеем

$\sqrt{(1+2\log_2 x)\left(2+\frac{\log_2 x}{2}\right)}=\frac{3\log_2 x}{2}$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $2(1+2\log_2 x)(4+\log_2 x)=9\log_2^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\log_2^2 x - 18\log_2 x - 8 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, находим $\log_2 x = -\frac{2}{5}$; $\log_2 x = 4$, откуда получаем $x_1 = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$, не подходит по ОДЗ; $x_2 = 16$.

Ответ: 16.

Решить системы уравнений (**7.334–7.340**):

7.334. $\begin{cases} \log_2(u+\vartheta) - \log_3(u-\vartheta) = 1, \\ u^2 - \vartheta^2 = 2. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} u+\vartheta > 0, \\ u-\vartheta > 0. \end{cases}$

Перейдем в первом уравнении системы к основанию 2, а второе уравнение логарифмируем по основанию 2. Получаем

$$\begin{cases} \log_2(u+\vartheta) + \dfrac{\log_2(u-\vartheta)}{\log_2 3} = 1, \\ \log_2(u+\vartheta)(u-\vartheta) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\log_2(u+\vartheta) + \log_2(u-\vartheta) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(u+\vartheta) = 1 - \log_2(u-\vartheta)$.

Тогда из первого уравнения имеем

$$1 - \log_2(u-\vartheta) + \frac{\log_2(u-\vartheta)}{\log_2 3} = 1 \Leftrightarrow \log_2(u-\vartheta) = 0,\ u-\vartheta = 1.$$

Тогда $\log_2(u+\vartheta) = 1 - 0 = 1$, откуда $u+\vartheta = 2$.

Таким образом, система имеет вид $\begin{cases} u-\vartheta = 1, \\ u+\vartheta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{2}, \\ \vartheta = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

7.335. $\begin{cases} x^p = y^q, \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases}$ $(p \ne q$ и $pq \ne 0)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$

Логарифмируя первое уравнение системы по основанию a, имеем

$$\log_a x^p = \log_a y^q \Leftrightarrow p\log_a x = q\log_a y \Leftrightarrow \log_a x = \frac{q}{p}\log_a y.$$

Из второго уравнения системы получим

$$\log_a x - \log_a y = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

Тогда $\begin{cases} \log_a x = \dfrac{q}{p}\log_a y, \\ \log_a x - \log_a y = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{q}{p} - 1\right)\log_a y = \frac{\frac{q}{p}\log_a y}{\log_a y}, \left(\frac{q}{p} - 1\right)\log_a y = \frac{q}{p}, \log_a y = \frac{q}{q-p},$$

$y = a^{\frac{q}{q-p}}$. Тогда $\log_a x = \dfrac{q}{p} \cdot \dfrac{q}{q-p} = \dfrac{q^2}{p(q-p)}$, $x = a^{\frac{q^2}{p(q-p)}}$.

Ответ: $\left(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}}, a^{\frac{q}{q-p}}\right)$.

7.336. $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Логарифмируя первое и второе уравнения системы по основанию 10, имеем

$$\begin{cases} \lg 3^{\lg x} = \lg 4^{\lg y}, \\ \lg(4x)^{\lg 4} - \lg(3y)^{\lg 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \cdot \lg 3 = \lg y \cdot \lg 4, \\ \lg 4 \cdot (\lg 4 + \lg x) = \lg 3 \cdot (\lg 3 + \lg y) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lg x = \dfrac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \lg y$. Далее, из второго уравнения получим

$$\lg 4 \cdot \left(\lg 4 + \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \lg y \right) = \lg 3 \cdot (\lg 3 + \lg y) \Leftrightarrow \lg y = -\lg 3,\ y = \frac{1}{3}.$$

Тогда $\lg x = \dfrac{\lg 4}{\lg 3} \cdot (-\lg 3) = -\lg 4,\ x = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3} \right)$.

7.337. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2{,}5 \lg^2 a^2 \text{ при } a > 0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы $x = \dfrac{a^2}{y}$. Далее, из второго уравнения получим $\lg^2 \dfrac{a^2}{y} + \lg^2 y = 2{,}5 \lg^2 a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lg^2 a^2 - 2 \lg a^2 \cdot \lg y + \lg^2 y + \lg^2 y - 2{,}5 \lg^2 a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2 \lg^2 y - 2 \lg a^2 \cdot \lg y - 1{,}5 \lg^2 a^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg y$, имеем

1) $\lg y = -\dfrac{\lg a^2}{2} = \lg\left(\dfrac{1}{-a} \right),\ y_1 = -\dfrac{1}{a}$;

2) $\lg y = \dfrac{3}{2} \lg a^2 = \lg(-a)^3,\ y_2 = -a^3$. Тогда $x_1 = \dfrac{a^2}{-\dfrac{1}{a}} = -a^3$,

$$x_2 = \frac{a^2}{-a^3} = -\frac{1}{a}.$$

Ответ: $\left(-a^3; -\dfrac{1}{a} \right), \left(-\dfrac{1}{a}; -a^3 \right)$.

7. 338. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$

Так как $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, запишем первое уравнение системы в виде

$x^{\log_8 y} + x^{\log_8 y} = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\log_8 y} = 4 \Leftrightarrow x^{\log_8 y} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x^{\log_8 y} = \log_2 2 \Leftrightarrow \log_8 y \cdot \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 y \cdot \log_2 x}{3} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 y \cdot \log_2 x = 3$. Во втором уравнении системы перейдем к основанию 2. Имеем $\dfrac{\log_2 x}{2} - \dfrac{\log_2 y}{2} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 y = 2$.

Таким образом, получаем $\begin{cases} \log_2 y \cdot \log_2 x = 3, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = 2 + \log_2 y \Rightarrow \log_2 y(2 + \log_2 y) = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 y + 2\log_2 y - 3 = 0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 y$, находим $\log_2 y = -3$, $\log_2 y = 1$, откуда $y_1 = \dfrac{1}{8}$, $y_2 = 2$. Тогда

$\log_2 x = 2 - 3 = -1$ или $\log_2 x = 2 + 1 = 3$, откуда $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 8$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}\right)$, $(8; 2)$.

7.339. $\begin{cases} \left(2^{x+y}\right)^{x^2 - xy - 8} = 1, \\ \left(0{,}37^{x-y}\right)^{x^2 + xy + 2x - 16} = 1. \end{cases}$

Решение.

Перепишем эту систему уравнений в виде

$\begin{cases} 2^{(x+y)(x^2 - xy - 8)} = 2^0, \\ 0{,}37^{(x-y)(x^2 + xy + 2x - 16)} = (0{,}37)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy - 8) = 0, \\ (x-y)(x^2 + xy + 2x - 16) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+xy+2x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=8, \\ y_2=-8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-xy-8=0, \\ x-y=0 \end{cases} \varnothing;$

4) $\begin{cases} x^2-xy-8=0, \\ x^2+xy+2x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=\frac{1}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_4=-4, \\ y_4=-2. \end{cases}$

Ответ: $(0;0), (8;-8), \left(3;\frac{1}{3}\right), (-4;-2)$.

7.340. $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27, \\ \log_3 y-\log_3 x=1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 0<y\neq 1. \end{cases}$

Так как $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$, то первое уравнение системы имеет вид

$x^{\log_3 y}+2x^{\log_3 y}=27 \Leftrightarrow 3x^{\log_3 y}=27 \Leftrightarrow x^{\log_3 y}=9 \Leftrightarrow \log_3 x^{\log_3 y}=\log_3 9;$

$\log_3 y\cdot\log_3 x=2$. Тогда система имеет вид $\begin{cases} \log_3 y\cdot\log_3 x=2, \\ \log_3 y-\log_3 x=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 y=1+\log_3 x, \\ (1+\log_3 x)\log_3 x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

1) $\begin{cases} \log_3 x=-2, \\ \log_3 y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{9}, \\ y_1=\frac{1}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x=1, \\ \log_3 y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=9. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right), (3;9)$.

Решения к главе 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \qquad (8.1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z; \qquad (8.2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z; \qquad (8.3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2}, \quad n\in Z; \qquad (8.4)$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z; \qquad (8.5)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z. \qquad (8.6)$$

(Здесь и в дальнейшем запись $n\in Z$ означает, что n – любое целое число).

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 8.1), а также знаки функций по четвертям (табл. 8.2).

Таблица 8.1

Аргумент (α, градусы, радианы)	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0^\circ\ (0)$	0	1	0	∞ (не определен)
$15^\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75^\circ\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Таблица 8.2

Четверть	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{8.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{8.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{8.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.11}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.12}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.13}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,. \tag{8.14}$$

Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,; \tag{8.15}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\,; \tag{8.16}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\,; \tag{8.17}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.18}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \tag{8.19}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \tag{8.20}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z; \tag{8.21}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \tag{8.22}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \tag{8.23}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \tag{8.24}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z; \tag{8.25}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, n \in Z; \tag{8.26}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.27}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.28}$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \tag{8.29}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \tag{8.30}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \tag{8.31}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,; \tag{8.32}$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha); \tag{8.33}$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha); \tag{8.34}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\, n\in Z\,; \tag{8.35}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\, n\in Z\,; \tag{8.36}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z\,; \tag{8.37}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z\,; \tag{8.38}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in Z,\, \beta\neq\pi n,\, n\in Z\,; \tag{8.39}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in Z,\, \beta\neq\pi n,\, n\in Z\,; \tag{8.40}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z\,; \tag{8.41}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z\,; \tag{8.42}$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \tag{8.43}$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \tag{8.44}$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \tag{8.45}$$

$$1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \tag{8.46}$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ \cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.47}$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ \cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.48}$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.49}$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.50}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1 = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.51}$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.52}$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.53}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.54}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.55}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.56}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.57}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right); \tag{8.58}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right); \tag{8.59}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right); \tag{8.60}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{8.61}$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{8.62}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{8.63}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right). \tag{8.64}$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \tag{8.65}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \tag{8.66}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{8.67}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.68}$$

Формулы приведения

$$\left.\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha, \quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\ &\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha, \quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha, \quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\\ &\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha, \quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z;
\end{aligned}\right\} \tag{8.71}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z.
\end{aligned}\right\} \tag{8.72}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическим называется уравнение, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = m, \tag{8.73}$$

$$\cos x = m, \tag{8.74}$$

$$\operatorname{tg} x = m, \tag{8.75}$$

$$\operatorname{ctg} x = m, \tag{8.76}$$

где m – любое действительное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех углов (дуг), имеющих данное значение тригонометрической функции.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

1. $\sin x = m$. Если $|m| \le 1$, то решения данного уравнения определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.77}$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (8.73) решений не имеет.

2. $\cos x = m$. Если $|m| \le 1$, то решения этого уравнения определяются формулой

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{8.78}$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (8.74) решений не имеет.

3. $\operatorname{tg} x = m$. При любом действительном m

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.79}$$

4. $\operatorname{ctg} x = m$. При любом действительном m

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.80}$$

В частных случаях при $m = -1$, $m = 0$, $m = 1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.81}$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.82}$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.83}$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.84}$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.85}$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.86}$$

$$\operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.87}$$

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.88}$$

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.89}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.90}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.91}$$

$$\operatorname{ctg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.92}$$

Тригонометрические уравнения вида $\sin(ax+b) = m$, $\cos(ax+b) = m$, $\operatorname{tg}(ax+b) = t$, $\operatorname{ctg}(ax+b) = t$, где $ax+b$ — линейная функция, $|m| < 1$, $a \neq 0$, x, b — любые действительные числа, также относятся к простейшим и приводятся к уравнениям (8.73) – (8.76) заменой $ax+b = y$.

Тригонометрические уравнения, содержащие тригонометрические функции одинакового аргумента

Рассмотрим тригонометрические уравнения, рациональные относительно тригонометрических функций.

Пусть имеем

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \tag{8.93}$$

где R – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Данное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одинакового аргумента. Затем, решая получившееся алгебраическое уравнение относительно этой функции, приводят данное уравнение к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного и проверяют, какие из них являются решениями данного уравнения.

Если $x \neq (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, то каждое тригонометрическое уравнение вида (8.93) можно привести к рациональному уравнению относительно неизвестного $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул (8.65) – (8.68). Решая уравнение таким методом, можно потерять корни вида $x = (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, для которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла. Поэтому необходимо проверить, являются ли числа $x = (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, корнями исходного уравнения.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене x на $\pi - x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\sin x$.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему не изменяется при замене x на $-x$, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\cos x$.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене x на $\pi + x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$.

Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x = 0, \quad (8.94)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, а n — натуральное число, называется однородным уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородности уравнения или показателем однородности.

Уравнение (8.94) является частным случаем уравнения (8.93) и делением обеих своих частей на $\cos^n x \neq 0$ (или на $\sin^n x \neq 0$) приводится к целому рациональному относительно $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$):

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0$$

или

$$a_0 \operatorname{ctg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0;$$

при этом область определения уравнения сужается на значения $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ (или на $x = \pi n$), где $n \in Z$.

Умножением на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, где $k \in N$, можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Так, к уравнению вида (8.94) сводится уравнение

$$a_0 \cos^{2n} x + a_1 \cos^{2n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x = b.$$

Для этого нужно умножить b на тригонометрическую единицу:

$$b \equiv b\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^k, \quad k \in Z.$$

Уравнение вида $a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$

Это уравнение является частным случаем уравнения (8.93), следовательно, его можно решать с помощью универсальной подстановки, а также приводить к однородному.

Укажем еще один способ решения этого уравнения, так называемый способ введения вспомогательного угла. Пусть

$$a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right). \tag{8.95}$$

Разделим обе его части на $\sqrt{a^2 + b^2}$, тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть φ — одно из решений системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Воспользовавшись этими равенствами, запишем уравнение в виде

$$\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Применив формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, получим уравнение $\sin(\omega x + \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, которое, как видно из проделанных выкладок, равносильно исходному уравнению. Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, т.е.

$a^2+b^2 \ge c^2$, то уравнение имеет решение

$$\omega x+\varphi=(-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n$$

или

$$x=\frac{(-1)^n}{\omega}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi n}{\omega},\ n\in Z.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$, т.е. $a^2+b^2<c^2$, то уравнение решений не имеет.

Уравнения, рациональные относительно выражений $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$

Если левая часть тригонометрического уравнения $f(x)=0$ содержит лишь одно из выражений $\sin x+\cos x$ или $\sin x-\cos x$ и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x\cos x$), то, вводя новое неизвестное $t=\sin x+\cos x$ или $t=\sin x-\cos x$ и учитывая, что $\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$, $\sin 2x=$ $=1-(\sin x-\cos x)^2$, приходим к уравнению относительно t.

СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений пользуются способом подстановки или сводят системы тригонометрических уравнений к системам алгебраических уравнений. В ряде случаев для решения системы тригонометрических уравнений ее преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например, исключить одно из неизвестных, разложить полученное уравнение на множители и т.д. Решения системы записываются в виде упорядоченных пар $(x; y)$.

Решить уравнения (**8.406 — 8.492**):

8.406. $\left(\cos^2 x+\cos^{-2} x\right)\left(1+\operatorname{tg}^2 2y\right)(3+\sin 3z)=4.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos 2y\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 2y}\cdot(3+\sin 3z)=4.$$

Левая часть уравнения не меньше 4, поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\cos^2 x=1,\\ \cos^2 2y=1,\\ \sin 3z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\pm1,\\ \cos 2y=\pm1,\\ \sin 3z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi k, k\in Z,\\ y=\dfrac{\pi m}{2}, m\in Z,\\ z=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi n, n\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=\pi k,\ \ y=\dfrac{\pi m}{2},\ \ z=\dfrac{\pi}{6}(4n-1)$, где k, m и $n\in Z$.

8.407. $\dfrac{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x-\ldots+(-1)^n\cdot\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x,\ |\operatorname{tg}x|<1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\dfrac{b_1}{1-q}$, где $b_1=1$, имеем

$$\frac{\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}x}}{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}}=1+\sin 2x,\ \ \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x,$$

$$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=1+\sin 2x,\ \ \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)^2=0,$$

$$(\cos x+\sin x)\cdot\left(\frac{1}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)\right)=0.$$

Отсюда 1) $\cos x+\sin x=0$, или 2) $\frac{1}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)=0$.

1) $\operatorname{tg} x=-1$, что не подходит условию.

2) Умножив второе уравнение на $\cos x-\sin x\neq 0$, находим $\cos 2x=1$, $2x=2\pi n$, $x=\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\pi n$, $n\in Z$.

8.408. $\operatorname{tg} x-\sin 2x-\cos 2x(1-2\cos^{-1} x)=0$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x-\cos 2x\left(1-\frac{2}{\cos x}\right)=0,$$

$$\frac{\sin x-2\sin x\cos^2 x}{\cos x}-\frac{\cos 2x(\cos x-2)}{\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos^2 x)-\cos 2x(\cos x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin x\cos 2x-\cos 2x(\cos x-2)=0,\ -\cos 2x(\sin x+\cos x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),$$

$k\in Z$. $(\sin x+\cos x-2)\neq 0)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z$.

8.409. $\frac{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\cdot\sin^n t+\ldots}{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}=\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}$, $|\sin t|\neq 1$.

Решение.

ОДЗ: $\cos 2t\neq -1$.

По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\frac{b_1}{1-q}$, имеем $\frac{\frac{1}{1+\sin t}}{\frac{1}{1-\sin t}}=\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}$, $\frac{1-\sin t}{1+\sin t}=\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sin t}{1+\sin t}=\frac{1-(1-2\sin^2 t)}{1+1-2\sin^2 t},\ \frac{1-\sin t}{1+\sin t}=\frac{2\sin^2 t}{2(1-\sin^2 t)},$$

$$\frac{1-\sin t}{1+\sin t}=\frac{\sin^2 t}{(1-\sin t)(1+\sin t)} \Rightarrow 1-\sin t=\frac{\sin^2 t}{1-\sin t},$$

$$(1-\sin t)^2=\sin^2 t,\ \sin t=\frac{1}{2},\ t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

8.410. $\sqrt{3}\sin t-\sqrt{2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t}=0.$

Решение.

ОДЗ: $2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t\geq 0,\ 2\sin^2 t-2\sin t\cos t+3\cos^2 t\geq 0.$

Разделив это неравенство на $\cos^2 t\neq 0$, получаем $2\mathrm{tg}^2 t-2\mathrm{tg} t+3\geq 0$ и $t\in R$.

Из условия имеем $\sqrt{3}\sin t=\sqrt{2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t} \Leftrightarrow 3\sin^2 t=$ $=2\sin^2 t-2\sin t\cos t+3\cos^2 t$ при $\sin t\geq 0$, $\sin^2 t+2\sin t\cos t-3\cos^2 t=$ $=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 t+2\mathrm{tg} t-3=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg} t$, получаем $(\mathrm{tg} t)_1=-3$, $t_1=\pi-\mathrm{arctg}3+2\pi k=-\mathrm{arctg}3+\pi(2k+1)$ (с учетом $\sin t\geq 0$), $k\in Z$; $(\mathrm{tg} t)_2=1$, $t_2=\frac{\pi}{4}+2\pi l=\frac{\pi}{4}(8l+1)$ (с учетом $\sin t\geq 0$), $l\in Z$.

Ответ: $t_1=-\mathrm{arctg}3+\pi(2k+1)$; $t_2=\frac{\pi}{4}(8l+1)$, где k и $l\in Z$.

8.411. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}.$

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб, тогда

$$\sin^2 x+3\sqrt[3]{\sin^4 x\cos^2 x}+3\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^4 x}+\cos^2 x=4,$$

$$3\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x}\cdot\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}\right)=3.$$

Так как $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$, то получаем $3\sqrt[3]{4\sin^2 x\cos^2 x}=3$, $\sqrt[3]{\sin^2 2x}=1$, $\sin 2x=\pm 1$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.412. $2\sin^2 t=\sqrt{\sin^2 t-16\sin^2 t\cos^2 t+\cos^2 2t+\cos^2 t}.$

Решение.

Так как $2\sin t\cos t=\sin 2t,\ 2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, то

$2\sin^2 t=\sqrt{1-4\sin^2 2t\cos^2 2t},\ 2\sin^2 t=\sqrt{1-\sin^2 4t},\ (1-\cos 2t)^2=\cos^2 4t,$

$(1-\cos 2t)^2-\cos^2 4t=0,\ (1-\cos 2t-\cos 4t)(1-\cos 2t+\cos 4t)=0.$

Отсюда 1) $1-\cos 2t-\cos 4t=0$ или 2) $1-\cos 2t+\cos 4t=0.$

1) $1-\cos 2t-\cos^2 2t+1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2t+\cos 2t-2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(\cos 2t)_1=\frac{\sqrt{17}-1}{4},\ (\cos 2t)_2=\frac{-\sqrt{17}-1}{4}<-1,\varnothing;$

$t_1=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi m,\ m\in Z.$

2) $1-\cos 2t+2\cos^2 2t-1=0,\ \cos 2t(2\cos 2t-1)=0\Rightarrow\ \cos 2t=0,$

$2t_2=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ t_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z;\ \cos 2t=\frac{1}{2},$

$2t_3=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ t_3=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $t_1=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi m;\ t_2=\frac{\pi}{4}(2k+1);\ t_3=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,$ где k,m и $n\in Z.$

8.413. $\cos z\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2 z-\sin^2 z}+\sin z\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2 z-\cos^2 z}=2\sin z.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos z\neq 0,\\ \sin z\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем

$\cos z\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 z-\sin^2 z\cos^2 z}{\cos^2 z}}+\sin z\cdot\sqrt{\frac{\cos^2 z-\cos^2 z\sin^2 z}{\sin^2 z}}=2\sin z\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos z \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 z\left(1-\cos^2 z\right)}{\cos^2 z}} + \sin z \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 z\left(1-\sin^2 z\right)}{\sin^2 z}} = 2\sin z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos z \cdot \sqrt{\frac{\sin^4 z}{\cos^2 z}} + \sin z \cdot \sqrt{\frac{\cos^4 z}{\sin^2 z}} = 2\sin z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos z \sin^2 z}{|\cos z|} + \frac{\sin z \cos^2 z}{|\sin z|} = 2\sin z.$$

Получаем 4 случая:

$$1) \begin{cases} 0 < \cos z < 1, \\ 0 < \sin z < 1, \\ \dfrac{\cos z \sin^2 z}{\cos z} + \dfrac{\sin z \cos^2 z}{\sin z} = 2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos z < 1, \\ 0 < \sin z < 1, \\ \sin^2 z + \cos^2 z = 2\sin z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin z = \frac{1}{2}, \quad z_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2) \begin{cases} -1 < \cos z < 0, \\ 0 < \sin z < 1, \\ \dfrac{\cos z \sin^2 z}{-\cos z} + \dfrac{\sin z \cos^2 z}{\sin z} = 2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \cos z < 0, \\ 0 < \sin z < 1, \\ -\sin^2 z + \cos^2 z = 2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \cos z < 0, \\ 0 < \sin z < 1, \\ 2\sin^2 z + 2\sin z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1, \varnothing;$$

$$\sin z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \pi - \arcsin\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in Z;$$

$$3) \begin{cases} -1 < \cos z < 0, \\ -1 < \sin z < 0, \\ \dfrac{\cos z \sin^2 z}{-\cos z} + \dfrac{\sin z \cos^2 z}{-\sin z} = 2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \cos z < 0, \\ -1 < \sin z < 0, \\ -\sin^2 z - \cos^2 z = 2\sin z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin z = -\frac{1}{2}, z_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z;$$

4) $\begin{cases} 0 < \cos z < 1, \\ -1 < \sin z < 0, \\ \dfrac{\cos z \sin^2 z}{\cos z} + \dfrac{\sin z \cos^2 z}{-\sin z} = 2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos z < 1, \\ -1 < \sin z < 0, \\ \sin^2 z - \cos^2 z = 2\sin z \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos z < 1, \\ -1 < \sin z < 0, \\ 2\sin^2 z - 2\sin z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1, \varnothing; \sin z = \frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

$$z_4 = \arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi l, l \in Z.$$

Объединяя решения 1 и 3, 2 и 4, имеем $z_1 = \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ z_2 = \arcsin\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \pi n,$ где k и $n \in Z$.

Ответ: $z_1 = \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ z_2 = \arcsin\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \pi n,$ где k и $n \in Z$.

8.414. $\cos x + \sqrt{\dfrac{3}{2} - \cos^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2} - \cos^2 x} = 1.$

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{3}{2} - \cos^2 x \ge 0,\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \le \cos x \le \sqrt{\dfrac{3}{2}}.$

Запишем уравнение в виде $(\cos x - 1) - (\cos x - 1)\sqrt{\dfrac{3}{2} - \cos^2 x} = 0,$

$$(\cos x - 1)\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow 1)\ \cos x - 1 = 0,\ \cos x = 1,\ x_1 = 2\pi k,$$

$$k \in Z;\ 2)\ 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} = 0,\ \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} = 1,\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z.$$

Ответ: $x_1 = 2\pi k;\ x_2 = \dfrac{\pi}{4}(2n+1),$ k и $n \in Z$.

8.415. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}-\sin x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}+\sin x}=1.$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[5]{\frac{1}{2}-\sin x}=y,\\ \sqrt[5]{\frac{1}{2}+\sin x}=z,\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{2}-\sin x=y^5,\\ \frac{1}{2}+\sin x=z^5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1,\\ y^5+z^5=1.\end{cases}$

Второе уравнение этой системы имеет вид

$(y+z)(y^4-y^3z+y^2z^2-yz^3+z^4)=1,$

$(y+z)((y^4+z^4)-yz(y^2+z^2)+y^2z^2)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(y+z)\left(((y+z)^2-2yz)^2-2y^2z^2-yz((y+z)^2-2yz)+y^2z^2\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(y+z=1),\ (1-2yz)^2-y^2z^2-yz(1-2yz)=1\Leftrightarrow\ 5y^2z^2-5yz=0,$

$yz(yz-1)=0.$ Отсюда или $yz=0$, или $yz=1$.

Имеем два случая:

1) $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=1.\end{cases}$

Из первой системы получаем $\begin{cases}y_1=0,\\ z_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}y_2=1,\\ z_2=0.\end{cases}$

Вторая система не имеет решений $(D<0)$. Тогда $\sin x=z^5-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

или $\sin x=-\frac{1}{2}$. Таким образом $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k\pm1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1),\ k\in Z.$

8.416. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x.$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

Тогда $1+\sin x-2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}+1-\sin x=1+2\cos x+\cos^2 x$,

$1-2|\cos x|=2\cos x+\cos^2 x$.

Имеем два случая:

$$1)\begin{cases}-1\le\cos x<0,\\ \cos^2 x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le\cos x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \cos x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\cos x=-1$$

$x_1=\pi+2\pi k=\pi(2k+1),\ k\in Z$;

$$2)\begin{cases}0\le\cos x\le 1,\\ \cos^2 x+4\cos x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\cos x\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=-2-\sqrt{5}<-1,\\ \cos x=-2+\sqrt{5}.\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\cos x=-2+\sqrt{5},$$

$x_2=\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi(2k+1);\ x_2=\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi n,\ k$ и $n\in Z$.

8.417. $\sqrt{1+3\operatorname{ctg}x}+\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x}{3+\operatorname{tg}x}}=\dfrac{5}{2}$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}1+3\operatorname{ctg}x\ge 0,\\ \dfrac{\operatorname{tg}x}{3+\operatorname{tg}x}\ge 0,\\ \sin x\ne 0,\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{ctg}x\ge-\dfrac{1}{3},\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x\ge 0,\\ \operatorname{tg}x<-3,\end{array}\right.\\ \sin x\ne 0,\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x<-3,\\ \operatorname{tg}x>0,\end{array}\right.\\ \sin x\ne 0,\\ \cos x\ne 0.\end{cases}$$

Из условия имеем $\sqrt{1+\dfrac{3}{\operatorname{tg}x}}+\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x}{3+\operatorname{tg}x}}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x+3}{\operatorname{tg}x}}+\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x}{3+\operatorname{tg}x}}=\dfrac{5}{2}$

Если $\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x+3}{\operatorname{tg}x}}=y\ge 0$, то уравнение принимает вид $y+\dfrac{1}{y}-\dfrac{5}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y^2-5y+2=0\Leftrightarrow y_1=\dfrac{1}{2},\ y_2=2.$ Тогда $\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x+3}{\operatorname{tg}x}}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\operatorname{tg}x+3}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{1}{4},$

$\operatorname{tg}x=-4,\ \ x_1=-\operatorname{arctg}x4+\pi k,\ k\in Z;\ \ \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x+3}{\operatorname{tg}x}}=2,\ \ \dfrac{\operatorname{tg}x+3}{\operatorname{tg}x}=4,\ \ \operatorname{tg}x=1,$

$x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=-\operatorname{arctg}4+\pi k;\ \ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \ k$ и $n\in Z.$

8.418. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}-\cos 2x}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}+\cos 2x}=1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\cos 2x\ge 0,\\ \dfrac{1}{2}+\cos 2x\ge 0,\end{cases}\ -\dfrac{1}{2}\le\cos 2x\le\dfrac{1}{2}.$

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}-\cos 2x}=y,\\ \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}+\cos 2x}=z,\end{cases}\ \begin{cases}\dfrac{1}{2}-\cos 2x=y^4,\\ \dfrac{1}{2}+\cos 2x=z^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+z=1,\\ y^4+z^4=1.\end{cases}$

Второе уравнение системы имеет вид $\left((y+z)^2-2yz\right)^2-2y^2z^2=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(y+z=1)\ \ (1-2yz)^2-2y^2z^2=1\Leftrightarrow\ 2y^2z^2-4yz=0,\ \ yz(yz-2)=0.$ Отсюда или $yz=0$, или $yz-2=0$.

Имеем два случая:

1) $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}y+z=1,\\ yz=2.\end{cases}$

Из первой системы получаем: $\begin{cases}y_1=0,\\ z_1=1;\end{cases}\ \begin{cases}y_2=1,\\ z_2=0.\end{cases}$

Вторая система не имеет решений $(D<0)$. Тогда $\cos 2x=z^4-\dfrac{1}{2},$

$\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2},\ 2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{\pi}{6}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1),\ k\in Z.$

8.419. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$

Решение.

Если $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}=y$, то $\sin^2 x+2\sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}+2-\sin^2 x=$ $=y^2,\ \sin x\cdot\sqrt{2-\sin^2 x}=\frac{y^2-2}{2}.$

Относительно y исходное уравнение принимает вид $y+\frac{y^2-2}{2}=3,$ $y^2+2y-8=0\Rightarrow\ y_1=-4,\ y_2=2$ и $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}=-4$ или $\sin x+$ $+\sqrt{2-\sin^2 x}=2.$ Из первого уравнения $\sqrt{2-\sin^2 x}=-4-\sin x,\varnothing.$ Из второго уравнения $\sqrt{2-\sin^2 x}=2-\sin x,\ 2-\sin^2 x=4-4\sin x+\sin^2 x,$ $\sin^2 x-2\sin x+1=0,\ (\sin x-1)^2=0,\ \sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),$ $k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$

8.420. $2-\sin x=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}.$

Решение.

Так как значения $\sin x$ не превышают 1, то $2-\sin x\ge1$. Величина дроби в правой части уравнения при любых x не может превышать 1, т.е. $\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\le1$, т.к. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\le\sqrt{1+\sin x}+$ $+\sqrt{1-\sin x}\Leftrightarrow\ \sqrt{1-\sin x}\ge0.$ Таким образом, равенство возможно тогда и только тогда, когда $\begin{cases}2-\sin x=1,\\ \sqrt{1-\sin x}=0,\end{cases}$ $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+$ $+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1), k\in Z.$

8.421. $\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg}x}=3.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Возведя обе части уравнения в куб, получаем

$$2-\operatorname{tg}x+3\sqrt[3]{(2-\operatorname{tg}x)^2\cdot(7+\operatorname{tg}x)}+3\sqrt[3]{(2-\operatorname{tg}x)\cdot(7+\operatorname{tg}x)^2}+7+\operatorname{tg}x=27\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(2-\operatorname{tg}x)\cdot(7+\operatorname{tg}x)}\left(\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg}x}\right)=18\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg}x}=3\right)$$

$$9\sqrt[3]{(2-\operatorname{tg}x)\cdot(7+\operatorname{tg}x)}=18,\ \sqrt[3]{(2-\operatorname{tg}x)\cdot(7+\operatorname{tg}x)}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2-\operatorname{tg}x)(7+\operatorname{tg}x)=8,\ \operatorname{tg}^2x+5\operatorname{tg}x-6=0\Rightarrow\ \operatorname{tg}x=-6,$$

$$x_1=-\operatorname{arctg}6+\pi k, k\in Z;\ \operatorname{tg}x=1,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1), n\in Z.$$

Ответ: $x_1=-\operatorname{arctg}6+\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ k$ и $n\in Z.$

8.422. $\sqrt{4\cos^2x+1}+\sqrt{4\sin^2x+3}=4.$

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$4\cos^2x+1+2\sqrt{(4\cos^2x+1)(4\sin^2x+3)}+4\sin^2x+3=16,$$

$$\sqrt{(4\cos^2x+1)(4\sin^2x+3)}=4\Leftrightarrow\ (4\cos^2x+1)(4\sin^2x+3)=16,$$

$$(4\cos^2x+1)(4(1-\cos^2x)+3)-16=0,\ 16\cos^4x-24\cos^2x+9=0,$$

$$(4\cos^2x-3)^2=0,\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k=\frac{\pi}{6}(6k\pm1), k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1), k\in Z.$

8.423. $\sqrt[3]{\sin^2x}-\sqrt[3]{\cos^2x}=\sqrt[3]{2\cos2x}.$

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб.

Тогда $\sin^2x-3\sqrt[3]{\sin^4x\cos^2x}+3\sqrt[3]{\sin^2x\cos^4x}-\cos^2x=2\cos2x,$

$$-3\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x}\cdot\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}\right)=3\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}\right)-\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^2 x 2\cos 2x}=\cos 2x\Leftrightarrow$$

$$-\sin^2 x\cos^2 x 2\cos 2x=\cos^3 2x,\ \ \cos 2x\left(\cos^2 2x+2\sin^2 x\cos^2 x\right)=0\Rightarrow$$

1) $\cos 2x=0,\ \ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\cos^2 2x+2\sin^2 x\cos^2 x=0,\ \ \cos^2 2x=-\frac{1}{2}\sin^2 2x,\ \varnothing.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.424. $\cos x+\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}=0.$

Решение.

Из условия имеем $\cos x+\sqrt{(\sin x-2\cos x)^2}=0,\ \cos x+|\sin x-2\cos x|=0.$ Получаем совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x-2\cos x<0,\\ \cos x-\sin x+2\cos x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x-2\cos x\ge 0,\\ \cos x+\sin x-2\cos x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x-2\cos x<0,\\ \sin x-3\cos x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x-2\cos x\ge 0,\\ \sin x-\cos x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x-2\cos x<0,\\ \operatorname{tg}x=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x-2\cos x\ge 0,\\ \operatorname{tg}x=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{5}{4}\pi+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k+5),\ k\in Z,\\ x_2=\pi+\operatorname{arctg}3+2\pi n=\operatorname{arctg}3+\pi(2n+1),\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+5)$, $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi(2n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.425. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$.

Решение.

ОДЗ: $\cos 2x\ge 0$.

Из условия имеем:

$$\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}+\sqrt{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}-2\sqrt{\sin x+\cos x}=0,$$

$$\sqrt{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}+\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}-2\sqrt{\sin x+\cos x}=0,$$

$$\sqrt{\cos x+\sin x}\cdot\left(\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}-2\right)=0\Rightarrow$$

1) $\sqrt{\cos x+\sin x}=0$,

2) $\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}-2=0$.

1) $\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-1$, $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k\in Z$.

2) $\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}=2\Leftrightarrow \cos^2 x+4\cos x-5=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x=-5, \varnothing$; или $\cos x=1$, $x_2=2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=2\pi n$, k и $n\in Z$.

8.426. $\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}^3 4x=3$.

Решение.

ОДЗ: $\sin 4x\ne 0$.

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$-2\operatorname{ctg}2x+2\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}^3 4x=3,\ -2(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{tg}2x)+\operatorname{ctg}^3 4x=3,$$

$$-2\cdot\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)+\operatorname{ctg}^3 4x=3,\ -2\cdot\frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\sin 2x\cos 2x}+\operatorname{ctg}^3 4x=3,$$

$$-4\cdot\frac{\cos 4x}{\sin 4x}+\operatorname{ctg}^3 4x=3,\ -4\operatorname{ctg}4x+\operatorname{ctg}^3 4x-3=0,$$

$$\operatorname{ctg}^3 4x-4\operatorname{ctg}4x-3=0,\ (\operatorname{ctg}^3 4x+1)-4(\operatorname{ctg}4x+1)=0,$$

$$(\operatorname{ctg}4x+1)(\operatorname{ctg}^2 4x-\operatorname{ctg}4x-3)=0\Rightarrow$$

1) $\operatorname{ctg}4x=-1,\ \ 4x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ x_1=-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4},\ \ k\in Z.$ Учитывая ОДЗ $(\sin 4x\neq 0),\ x_1=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z;$

2) $\operatorname{ctg}^2 4x-\operatorname{ctg}4x-3=0\Rightarrow\ \operatorname{ctg}4x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2},\ \ 4x=\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\pi k,$ $x_{2,3}=\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\frac{\pi n}{4},\ \ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+3);\ \ x_{2,3}=\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\frac{\pi n}{4},$ где k и $n\in Z.$

8.427. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1.$

Решение.

ОДЗ: $8\cos^2 x-1\geq 0,\ \left[\begin{array}{l}\cos x\geq\frac{1}{2\sqrt{2}},\\ \cos x\leq-\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{array}\right.$

Если $\begin{cases}\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}=y\geq 0,\\ \sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=z\geq 0,\end{cases}\ \begin{cases}10+8\sin^2 x=y^4,\\ 8\cos^2 x-1=z^4,\end{cases}$ то $y^4+z^4=17$ и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}y-z=1,\\ y^4+z^4=17.\end{cases}\ (*)$$

Преобразуем второе уравнение этой системы:

$$\left((y-z)^2+2yz\right)^2-2y^2z^2=17\Leftrightarrow\ (y-z=1)\ \ (1+2yz)^2-2y^2z^2-17=0,$$

$$y^2z^2+2yz-8=0\Rightarrow\ (yz)_1=-4,\ \ (yz)_2=2.$$

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-z=1,\\ yz=-4;\end{cases}\\ \begin{cases}y-z=1,\\ yz=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Решая вторую систему, получаем:

$$\begin{cases} y_1=-1, \\ z_1=-2; \end{cases} \begin{cases} y_2=2, \\ z_2=1. \end{cases}$$

Таким образом, $8\sin^2 x+10=y^4=2^4=16$, $\sin^2 x=\frac{3}{4}$, $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm1), k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1), k\in Z$.

8.428. $\sin^{-1}2x\sqrt{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+2}+\operatorname{ctg}2x\sqrt{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x-2}=4\cos^2 2x$.

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x\neq 0$.

Из условия имеем

$$\frac{1}{\sin 2x}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}+2}+\frac{1}{\operatorname{tg}2x}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}-2}=4(\cos 2x)^2.$$

По формулам $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ получаем

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{2\operatorname{tg}x}\cdot\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg}^2x+1}{\operatorname{tg}x}\right)^2}+\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{2\operatorname{tg}x}\cdot\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg}^2x-1}{\operatorname{tg}x}\right)^2}=4\cdot\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)^2.$$

Если $\operatorname{tg}x=y$, то

$$\frac{1+y^2}{2y}\cdot\sqrt{\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2}+\frac{1-y^2}{2y}\cdot\sqrt{\left(\frac{y^2-1}{y}\right)^2}=4\cdot\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+y^2}{2y}\cdot\left|\frac{y^2+1}{y}\right|+\frac{1-y^2}{2y}\cdot\left|\frac{y^2-1}{y}\right|-4\cdot\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2=0.$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1)\begin{cases} y<-1, \\ -\frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{y^2+1}{y}-\frac{1-y^2}{2y}\cdot\frac{y^2-1}{y}-4\cdot\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < -1, \\ 2\left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 = -1, \end{cases} \varnothing.$$

$$2) \begin{cases} -1 \le y < 0, \\ -\dfrac{1+y^2}{2y} \cdot \dfrac{y^2+1}{y} + \dfrac{1-y^2}{2y} \cdot \dfrac{y^2-1}{y} - 4 \cdot \left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le y < 0, \\ 2\left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 = -\dfrac{y^4+1}{y^2}, \end{cases} \varnothing.$$

$$3) \begin{cases} 0 < y \le 1, \\ \dfrac{1+y^2}{2y} \cdot \dfrac{y^2+1}{y} - \dfrac{1-y^2}{2y} \cdot \dfrac{y^2-1}{y} - 4 \cdot \left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y \le 1, \\ y^8 - 2y^6 + 10y^4 - 2y^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Разделив обе части последнего уравнения на y^4, имеем $y^4 - 2y^2 +$

$$+10 - \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^4} = 0 \Leftrightarrow \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) - 2\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 10 = 0.$$

Пусть $y^2 + \dfrac{1}{y^2} = t$, $\left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right)^2 = t^2$, $y^4 + 2 + \dfrac{1}{y^4} = t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^4 + \dfrac{1}{y^4} = t^2 - 2.$ Тогда наше уравнение принимает вид $t^2 - 2 -$

$-2t + 10 = 0$, $t^2 - 2t + 8 = 0$, $\varnothing\ (D < 0)$

$$4) \begin{cases} y \ge 1, \\ \dfrac{1+y^2}{2y} \cdot \dfrac{y^2+1}{y} + \dfrac{1-y^2}{2y} \cdot \dfrac{y^2-1}{y} - 4 \cdot \left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\ge 1,\\ 1=2\cdot\left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{tg}x\ge 1,\\ 1=2\cdot\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{tg}x\ge 1,\\ 1=2\cos^2 2x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{tg}x\ge 1,\\ 2\cos^2 2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{tg}x\ge 1,\\ \cos 4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+\pi n\le x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4},\ k\in Z,\end{cases}$$ и

на промежутке $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем $\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}<\dfrac{\pi}{2},\\ k\in Z,\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{8}+\dfrac{k}{4}<\dfrac{1}{2},\\ k\in Z,\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le k<\dfrac{3}{2},\\ k\in Z,\end{cases}$ $k=1$. Отсюда $x_1=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{8}$.

Ответ: $x=\dfrac{3\pi}{8}+\pi k,\ k\in Z$.

8.429. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{1-2\sin 4x}=-\sqrt{6}\cos 2x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\sin 4x\ge 0,\\ \cos 2x\le 0,\\ 1-2\sin 4x=6\cos^2 2x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 4x\le\dfrac{1}{2},\\ \cos 2x\le 0,\\ \cos^2 2x+\sin^2 2x-4\sin 2x\cos 2x-6\cos^2 2x=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 4x\le\dfrac{1}{2},\\ \cos 2x\le 0,\\ \sin^2 2x-4\sin 2x\cos 2x-5\cos^2 2x=0\end{cases}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 2x-4\mathrm{tg}2x-5=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathrm{tg}2x=-1$ или $\mathrm{tg}2x=5$. Учитывая ограничения, получаем $x_1=\frac{3\pi}{8}+\pi k, k\in Z;\ x_2=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}5+\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{3\pi}{8}+\pi k;\ x_2=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}5+\frac{\pi}{2}(2n+1),$ где k и $n\in Z$.

8.430. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0.$

Решение.

По формуле суммы синусов имеем $2\sin\frac{\pi\sqrt{t}+\pi t}{2}\cos\frac{\pi\sqrt{t}-\pi t}{2}=0.$

Отсюда 1) $\sin\frac{\pi\sqrt{t}+\pi t}{2}=0$ или 2) $\cos\frac{\pi\sqrt{t}-\pi t}{2}=0.$

1) $\frac{\pi\sqrt{t}+\pi t}{2}=\pi n,\ \sqrt{t}+t=2n,\ t+\sqrt{t}-2n=0, n\in Z\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{t}=\frac{-1-\sqrt{1+8n}}{2}, \varnothing;\ \sqrt{t}=\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2},$

$t_1=\left(\frac{\sqrt{1+8n}-1}{2}\right)^2=\frac{1+8n-2\sqrt{1+8n}+1}{4}=\frac{1-\sqrt{1+8n}}{2}+2n,$ где

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{1+8n}-1}{2}\geq 0,\\ 1+8n\geq 0,\\ n\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1+8n}\geq 1,\\ 8n\geq -1,\\ n\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\geq 0,\\ n\geq -\frac{1}{8},\\ n\in Z,\end{cases}\text{ т.е. } n=0;1;2;\ldots.$$

2) $\cos\frac{\pi\sqrt{t}-\pi t}{2}=0\Leftrightarrow\cos\frac{\pi t-\pi\sqrt{t}}{2}=0\Leftrightarrow\frac{\pi t-\pi\sqrt{t}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,$

$\frac{t-\sqrt{t}}{2}=\frac{1}{2}+k, k\in Z,\ t-\sqrt{t}-2k-1=0, k\in Z.$ Решив это уравнение

как квадратное относительно $\sqrt{t}$, имеем $\sqrt{t}=\frac{1-\sqrt{5+8k}}{2}$ при

$$\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5+8k}}{2}\ge 0,\\ 5+8k\ge 0,\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5+8k}\le 1,\\ k\ge -\dfrac{5}{8},\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5+8k\le 1,\\ k\ge -\dfrac{5}{8},\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\le -\dfrac{1}{2},\\ k\ge -\dfrac{5}{8},\\ k\in Z\end{cases}\varnothing.$$

$$\sqrt{t}=\frac{1+\sqrt{5+8k}}{2},\ k\in Z\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{t}=\dfrac{1+\sqrt{5+8k}}{2},\\ 5+8k\ge 0,\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}t=\left(\dfrac{1+\sqrt{5+8k}}{2}\right)^2,\\ k\ge -\dfrac{5}{8},\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2=\dfrac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k,\\ k=0;1;2;\ldots .\end{cases}$$

Ответ: $t_1=\dfrac{1-\sqrt{1+8k}}{2}+2k;\ t_2=\dfrac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k,\ k=0;1;2;\ldots .$

8.431. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0.$

Решение.

Уравнение равносильно двум уравнениям:

1) $\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1=0$ или 2) $\sin x+\cos x=0.$

1) $\cos^4 x+(2\sin^3 x-2\sin x)+1=0\Leftrightarrow\ \cos^4 x+2\sin x(2\sin^2 x-1)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos^4 x-2\sin x\cos^2 x+1=0.$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos^2 x$, находим

$$\cos^2 x=\sin x\pm\sqrt{\sin^2 x-1}=\sin x\pm\sqrt{-\cos^2 x}\Rightarrow -\cos^2 x\ge 0,\ \ \cos^2 x\le 0,$$

$$\cos^2 x=0,\ \ \cos x=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin x=0,\end{cases}\varnothing.$$

2) $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x+1=0,\ \operatorname{tg}x=-1,\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

8.432. $4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-14=0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-14=0,$$

$$4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-14=0,$$

$$4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-14=0,$$

$$4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2-14=0,$$

$$4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg}2x+\frac{4}{\sin^2 2x}-16=0,$$

$$\operatorname{ctg}^3 2x-3\operatorname{ctg}2x+\frac{1}{\sin^2 2x}-4=0,\ \operatorname{ctg}^3 2x-3\operatorname{ctg}2x+1+\operatorname{ctg}^2 2x-4=0,$$

$$\operatorname{ctg}^3 2x+\operatorname{ctg}^2 2x-3\operatorname{ctg}2x-3=0,\ \operatorname{ctg}^2 2x(\operatorname{ctg}2x+1)-3(\operatorname{ctg}2x+1)=0,$$

$$(\operatorname{ctg}2x+1)(\operatorname{ctg}^2 2x-3)=0\Rightarrow\ 1)\ \operatorname{ctg}2x+1=0,\ 2)\ \operatorname{ctg}^2 2x-3=0.$$

1) $\operatorname{ctg}2x=-1,\ \ 2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ \ x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{8}(4k+3),\ k\in Z.$

2) $\operatorname{ctg}^2 2x=3,\ \operatorname{ctg}2x=\pm\sqrt{3},\ 2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ x_2=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{12}(6n\pm 1),$
$n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3),\ \ x_2=\frac{\pi}{12}(6n\pm 1),$ где k и $n\in Z.$

8.433. $\cos^{-4} x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{(\cos^2 x)^2}+(\cos^2 x)^2=1+\cos 2x-2(1-\cos^2 2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2}+\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2=2\cos^2 2x+\cos 2x-1,$$

$\frac{4}{(1+\cos 2x)^2}+\frac{(1+\cos 2x)^2}{4}=2\cos^2 2x+\cos 2x-1$. Так как $a+\frac{1}{a}\geq 2$,

$a>0$, то $2\cos^2 2x+\cos 2x-1\geq 2$, $2\cos^2 2x+\cos 2x-3\geq 0$. Решая это неравенство как квадратное относительно $\cos 2x$, получаем $\cos 2x\leq -\frac{3}{2}$, $\varnothing$; или $\cos 2x\geq 1\Rightarrow$ $\cos 2x=1$, $2x=2\pi n$, $x=\pi n, n\in Z$.

Ответ: $x=\pi n, n\in Z$.

8.434. $\cos^{-4} x+8\cos^{-1} x-7=0$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

Пусть $\cos^{-1} x=y$, тогда получаем уравнение $y^4+8y-7=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y^4+2y^2+1-2y^2-1+8y-7=0,\ (y^2+1)^2-2y^2+8y-8=0,$$

$$(y^2+1)^2-2(y^2-4y+4)=0,\ (y^2+1)^2-2(y-2)^2=0,$$

$$\left(y^2+1+\sqrt{2}(y-2)\right)\left(y^2+1-\sqrt{2}(y-2)\right)=0,$$

$\left(y^2+\sqrt{2}y+1-2\sqrt{2}\right)\left(y^2-\sqrt{2}y+1+2\sqrt{2}\right)=0$. Уравнение во вторых скобках решения не имеет $(D<0)$, $y^2-\sqrt{2}y+1+2\sqrt{2}\neq 0$.

Тогда $y^2+\sqrt{2}y+1-2\sqrt{2}=0$, $y_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}$,

$$\cos^{-1} x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2},\ \cos x=\frac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}>1, \varnothing;$$

$$\cos^{-1} x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2},\ \cos x=\frac{2}{-\sqrt{2}-\sqrt{8\sqrt{2}-2}},$$

$$x=\pm\arccos\frac{2}{-\sqrt{2}-\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\arccos\dfrac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi n,\ n\in Z.$

8.435. $\sin^{10}3x+\cos^{10}3x=4\cdot\dfrac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\sin^2 3x\right)^5+\left(\cos^2 3x\right)^5=4\cdot\frac{\left(\sin^2 3x\right)^3+\left(\cos^2 3x\right)^3}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1-\cos6x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos6x}{2}\right)^5=4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}(1-\cos6x)\right)^3+\left(\frac{1}{2}(1+\cos6x)\right)^3}{4\cos^2 6x+1-\cos^2 6x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-\cos6x)^5}{32}+\frac{(1+\cos6x)^5}{32}=\frac{(1-\cos6x)^3+(1+\cos6x)^3}{2\left(3\cos^2 6x+1\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos6x)^5+(1+\cos6x)^5=16\cdot\frac{2\left(3\cos^2 6x+1\right)}{3\cos^2 6x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos6x)^5+(1+\cos6x)^5=32\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(1-\cos6x+1+\cos6x)\left((1-\cos6x)^4-(1-\cos6x)^3(1+\cos6x)+(1-\cos6x)^2\times\right.$
$\left.\times(1+\cos6x)^2-(1-\cos6x)(1+\cos6x)^3+(1+\cos6x)^4\right)=32,\ (1-\cos6x)^4+$
$+(1+\cos6x)^4-(1-\cos6x)(1+\cos6x)\left((1-\cos6x)^2+(1+\cos6x)^2\right)+$
$+(1-\cos6x)^2(1+\cos6x)^2=16\Leftrightarrow\left((1-\cos6x+1+\cos6x)^2-2(1-\cos6x)\times\right.$
$\left.\times(1+\cos6x)\right)^2-2(1-\cos6x)^2(1+\cos6x)^2-(1-\cos6x)(1+\cos6x)\times$
$\times\left((1-\cos6x+1+\cos6x)^2-2(1-\cos6x)(1+\cos6x)\right)+(1-\cos6x)^2\times$
$\times(1+\cos6x)^2=16,\ \left(4-2\left(1-\cos^2 6x\right)\right)^2-\left(1-\cos^2 6x\right)^2-\left(1-\cos^2 6x\right)\times$
$\times\left(4-2\left(1-\cos^2 6x\right)\right)=16,\ \left(4-2\sin^2 6x\right)^2-\sin^4 6x-\sin^2 6x\left(4-2\sin^2 6x\right)=16,$
$16-16\sin^2 6x+4\sin^4 6x-\sin^4 6x-4\sin^2 6x+2\sin^4 6x=16,\ 5\sin^4 6x-$
$-20\sin^2 6x=0,\ \sin^2 6x\left(\sin^2 6x-4\right)=0\Rightarrow$ 1) $\sin^2 6x-4=0,\ \sin^2 6x=4,\ \varnothing;$
2) $\sin^2 6x=0,\ \sin6x=0,\ 6x=\pi k,\ x=\dfrac{\pi k}{6},\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi k}{6}, k\in Z.$

8.436. $\operatorname{ctg}^4 2z=\cos^2 4z+1.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2z\neq 0.$

Из условия имеем $\frac{\cos^4 2z}{\sin^4 2z}=\cos^2 4z+1,\ \frac{\left(\cos^2 2z\right)^2}{\left(\sin^2 2z\right)^2}=\cos^2 4z+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{(1+\cos 4z)^2}{(1-\cos 4z)^2}=\cos^2 4z+1\Leftrightarrow\cos^4 4z-2\cos^3 4z+\cos^2 4z-4\cos 4z=0,$

$\cos 4z\left(\cos^3 4z-2\cos^2 4z+\cos 4z-4\right)=0\Rightarrow$ 1) $\cos 4z=0,\ 4z=\frac{\pi}{2}+\pi k,$

$z=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1), k\in Z;$ 2) $\cos^3 4z-2\cos^2 4z+\cos 4z-4=0.$ Если $t=\cos 4z$, то $-1\leq t\leq 1$ и можно рассмотреть функцию $y=t^3-2t^2+t-4.$ Производная $y'=3t^2-2t+1>0$, т.к. $D<0$, следовательно, y— монотонно возрастающая функция. $y(1)=-4$, поэтому на интервале $[-1;1]$ график функции ось не пересекает и уравнение корней не имеет.

Ответ: $z=\frac{\pi}{8}(2k+1), k\in Z.$

8.437. $\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(4-2\cos^4 x\right)=1+5\sin 3y.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Левая часть исходного уравнения ≥ 6, а правая ≤ 6, поэтому это уравнение равносильно системе двух уравнений:

$$\begin{cases}\cos x=\pm 1,\\ \sin 3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=-1,\\ \sin 3y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=1,\\ \sin 3y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow x=\pi k, k\in Z;$$

$$y=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}=\frac{\pi}{6}(4n+1),\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\pi k;\ y=\frac{\pi}{6}(4n+1)$, где k и $n\in Z$.

8.438. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(1-4\cos^2 2x)-2\cos 4x=3.$

Решение.

Из условия $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{4(1+\cos 4x)}{2}\right)-2\cos 4x=3,$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(-2\cos 4x-1)=2\cos 4x+3.$ Разделив обе части этого уравнения на $-2\cos 4x-1\neq 0,\quad x\neq\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z,$ получим $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=-\frac{2\cos 4x+3}{2\cos 4x+1}$. Так как $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, то и $-1\le-\frac{2\cos 4x+3}{2\cos 4x+1}\le 1\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{\cos 4x+1}{\cos 4x+1}\ge 0,\\ \frac{2}{2\cos 4x+1}\le 0.\end{cases}\Rightarrow\cos 4x\le -1,\ \cos 4x=-1,\ \ 4x=\pi+2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, получаем:

$$\cos\frac{\pi n}{2}=1\Rightarrow n=4k\Rightarrow\ \ x=\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ k\in Z.$

8.439. $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1}x)+2\cos^{-2}x+5=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Из условия имеем $2\cdot\left(9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5\cdot\left(3\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)+5=0.$

Пусть $3\cos x+\frac{1}{\cos x}=t$, $9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+6=t^2$, $9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=$ $=t^2-6$. Исходное уравнение принимает вид $2(t^2-6)+5t+5=0$, $2t^2+$ $+5t-7=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=-\frac{7}{2}$.

1) $3\cos^2 x-\cos x+1=0, \varnothing\ (D<0)$.

2) $6\cos^2 x+7\cos x+2=0 \Rightarrow (\cos x)_1=-\frac{1}{2}, x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;$

$(\cos x)_2=-\frac{2}{3}, x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k, k\in Z.$

Ответ: $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;$ $x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k,$ где n и $k\in Z.$

8.440. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg}t)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg}t)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos(\pi\operatorname{ctg}t)\neq 0,\\ \sin(\pi\operatorname{tg}t)\neq 0,\\ \cos t\neq 0,\\ \sin t\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $\frac{\sin(\pi\operatorname{ctg}t)}{\cos(\pi\operatorname{ctg}t)}-\frac{\cos(\pi\operatorname{tg}t)}{\sin(\pi\operatorname{tg}t)}=0,$

$\frac{\sin(\pi\operatorname{ctg}t)\sin(\pi\operatorname{tg}t)-\cos(\pi\operatorname{tg}t)\cos(\pi\operatorname{ctg}t)}{\cos(\pi\operatorname{ctg}t)\sin(\pi\operatorname{tg}t)}=0 \Leftrightarrow \cos(\pi\operatorname{tg}t+\pi\operatorname{ctg}t)=0,$

$\pi\operatorname{tg}t+\pi\operatorname{ctg}t=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,$ $\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t=\frac{1}{2}+n,$ $\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{1}{2}+n,$

$\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos t}=\frac{1+2n}{2},$ $\frac{2}{\sin 2t}=\frac{1+2n}{2},$ $\sin 2t=\frac{4}{1+2n}, n\in Z.$

$$\begin{cases}2t=(-1)^k\arcsin\dfrac{4}{1+2n}+\pi k,\ k\in Z,\\ -1\le\dfrac{4}{1+2n}\le 1,\\ n\in Z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{4}{1+2n}+\dfrac{\pi k}{2},\\ k\in Z, n\in Z,\\ n\ne -3;-2;-1;0;1;2.\end{cases}$$

Ответ: $t=\dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{4}{1+2n}+\dfrac{\pi k}{2}$, где $k\in Z$, $n\in Z$ и $n\ne -3;-2;$ $-1;0;1;2.$

8.441. $\cos^{-4}x-2\cos^{-2}x-12\operatorname{tg}x-16=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\ne 0.$

Из условия имеем $\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}-12\operatorname{tg}x-16=0,$

$$\frac{1-2\cos^2 x}{\cos^4 x}=12\operatorname{tg}x+16\Leftrightarrow -\frac{4\cos 2x}{(1+\cos 2x)^2}=12\operatorname{tg}x+16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\dfrac{-4(1-\operatorname{tg}^2x)}{1+\operatorname{tg}^2x}}{\left(1+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)}=12\operatorname{tg}x+16\Leftrightarrow\ \operatorname{tg}^4x-12\operatorname{tg}x-17=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}^4x+\operatorname{tg}^2x+1-2\operatorname{tg}^2x-12\operatorname{tg}x-18=0,$$

$$(\operatorname{tg}^2x+1)^2-2(\operatorname{tg}^2x+6\operatorname{tg}x+9)=0,\ (\operatorname{tg}^2x+1)^2-2(\operatorname{tg}x+3)^2=0,$$

$$(\operatorname{tg}^2x+1)^2-(\sqrt{2}(\operatorname{tg}x+3))^2=0,$$

$$(\operatorname{tg}^2x+1-\sqrt{2}(\operatorname{tg}x+3))(\operatorname{tg}^2x+1+\sqrt{2}(\operatorname{tg}x+3))=0,$$

$\left(\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1-3\sqrt{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1+3\sqrt{2}\right)=0.$

Отсюда 1) $\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1-3\sqrt{2}=0$, $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{12\sqrt{2}-2}}{2}$,

$x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{12\sqrt{2}-2}}{2}+\pi n, n\in Z.$

2) $\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1+3\sqrt{2}\neq 0, D<0.$

Ответ: $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k;$ $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi n$, k и $n\in Z$.

8.442. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=\frac{41}{128}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\left(\sin^2 2x\right)^4+\left(\cos^2 2x\right)^4=\frac{41}{128}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^4=\frac{41}{128},$

$(1-\cos 4x)^4+(1+\cos 4x)^4=\frac{41}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left((1-\cos 4x+1+\cos 4x)^2-2(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)\right)^2-2(1-\cos 4x)^2\times$

$\times(1+\cos 4x)^2=\frac{41}{8}$, $\left(4-2\left(1-\cos^2 4x\right)\right)^2-2\left(1-\cos^2 4x\right)^2-\frac{41}{8}=0,$

$\left(4-2\sin^2 4x\right)^2-2\sin^4 4x-\frac{41}{8}=0,$

$16-16\sin^2 4x+4\sin^4 4x-2\sin^4 4x-\frac{41}{8}=0,$

$16\sin^4 4x-128\sin^2 4x+87=0\Rightarrow$ $\sin 4x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $4x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,$

$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{12}(3k\pm 1), k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(3k\pm 1), k\in Z.$

8.443. $2(1-\sin x-\cos x)+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$2(1-(\sin x+\cos x))+\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=0,$$

$$2(1-(\sin x+\cos x))+\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=0,$$

$$2(1-(\sin x+\cos x))+\frac{1}{\sin x\cos x}=0.$$

Пусть $y=\sin x+\cos x$, тогда $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=y^2$, $2\sin x\cos x=y^2-1$, $\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$. Исходное уравнение принимает вид $2-2y+\frac{2}{y^2-1}=0$, $y^3-y^2-y=0$, $y(y^2-y-1)=0 \Rightarrow y_1=0$, $y_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $y_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Таким образом имеем $(\sin x+\cos x)_1=0$, $(\sin x+\cos x)_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $(\sin x+\cos x)_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1) $\operatorname{tg}x_1=-1$, $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k\in Z$.

2) $\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$,

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k,$$

$$x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$$

3) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{4}>1$, $\varnothing$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

8.444. $\frac{\operatorname{tg} t}{2-\cos^{-2} t}\cdot(\sin 3t-\sin t)=\frac{2}{\operatorname{ctg}^2 t-3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \sin t\neq 0,\\ 2\cos^2 t-1\neq 0,\\ 4\cos^2 t-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \sin t\neq 0,\\ \cos t\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Из условия имеем $\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{2-\frac{1}{\cos^2 t}}\cdot(\sin 3t-\sin t)=\frac{2}{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}-3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin t\cos t}{2\cos^2 t-1}\cdot 2\cos 2t\sin t=\frac{2\sin^2 t}{\cos^2 t-3\sin^2 t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 t\cos t=\frac{2\sin^2 t}{\cos^2 t-3\sin^2 t}\Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow\cos t=\frac{1}{\cos^2 t-3\sin^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t-3(1-\cos^2 t)}=\frac{1}{4\cos^2 t-3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos t-\frac{1}{4\cos^2 t-3}=0\Leftrightarrow\frac{4\cos^3 t-3\cos t-1}{4\cos^2 t-3}=0\Leftrightarrow 4\cos^3 t-3\cos t-$$

$-1=0\Leftrightarrow 3\cos^3 t-3\cos t+\cos^3 t-1=0$, $3\cos t(\cos^2 t-1)+(\cos^3 t-1)=0$,

$3\cos t(\cos t-1)(\cos t+1)+(\cos t-1)(\cos^2 t+\cos t+1)=0$,

$(\cos t-1)(3\cos t(\cos t+1)+\cos^2 t+\cos t+1)=0$,

$(\cos t-1)(4\cos^2 t+4\cos t+1)=0$, $(\cos t-1)(2\cos t+1)^2=0$,

$$(\cos t-1)\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Отсюда 1) $\cos t-1=0,\ \ \cos t=1$, не подходит по ОДЗ ($\sin t\neq 0$);

2) $\cos t+\frac{1}{2}=0,\ \ \cos t=-\frac{1}{2},\ \ t=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n=\frac{2\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

Ответ: $t=\frac{2\pi}{3}(3n\pm 1),\ n\in Z.$

8.445. $\operatorname{tg}(\pi\cos t)=\operatorname{ctg}(\pi\sin t).$

Решение.

Запишем уравнение в виде $\frac{\sin(\pi\cos t)}{\cos(\pi\cos t)}=\frac{\cos(\pi\sin t)}{\sin(\pi\sin t)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(\pi\cos t)\sin(\pi\sin t)=\cos(\pi\cos t)\cos(\pi\sin t),$

$\cos(\pi\cos t)\cos(\pi\sin t)-\sin(\pi\cos t)\sin(\pi\sin t)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(\pi\cos t+\pi\sin t)=0,\ \ \pi\cos t+\pi\sin t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\Leftrightarrow$

$\cos t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+2k}{2\sqrt{2}},\ k\in Z\Leftrightarrow$

$\cos t\cos\frac{\pi}{4}+\sin t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+2k}{2\sqrt{2}},\ k\in Z\Leftrightarrow\ \ \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+2k}{2\sqrt{2}},\ k\in Z.$

Так как $-1\le\frac{1+2k}{2\sqrt{2}}\le 1,\ k\in Z,$ то $-2\sqrt{2}\le 1+2k\le 2\sqrt{2},\ \ -2\sqrt{2}-$ $-1\le 2k\le 2\sqrt{2}-1,\ \ \frac{-2\sqrt{2}-1}{2}\le k\le\frac{2\sqrt{2}-1}{2},\ k\in Z,\ k=-1$ или $k=0$. Тогда 1) $k=-1,\ \ \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4},\ \ t-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+2\pi l,$

$t_1=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+2\pi l,\ l\in Z;$

2) $k=0$, $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $t-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n$,

$t_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

Объединив решения, имеем $t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

8.446. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-\cos 4x=3.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\cos 4x=3$,

$\frac{2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{2\sin x\cos x}-\left(1-2\sin^2 2x\right)-3=0$, $\frac{2}{\sin 2x}+2\sin^2 2x-4=0$,

$\sin^3 2x-2\sin 2x+1=0$, $(\sin 2x-1)\left(\sin^2 2x+\sin 2x-1\right)=0.$

Отсюда: 1) $\sin 2x=1$, $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z;$

2) $\sin 2x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1,\ \varnothing;$ $\sin 2x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

$2x=(-1)^k\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\pi k$,

$x_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4n+1);$ $x_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{\pi k}{2}$, где n и $k\in Z$.

8.447. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}^2 5x=\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}^2 3x-\operatorname{tg}^2 5x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0,\\ \cos 3x \neq 0,\\ \cos 5x \neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем $\operatorname{tg}^2 5x - \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg}2x\left(1-\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}^2 5x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}2x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 5x - \operatorname{tg}^2 3x}{1-\operatorname{tg}^2 5x\operatorname{tg}^2 3x}.$

Так как $\dfrac{(\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x)(\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}3x)}{(1-\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x)(1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x)} = \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}8x$, то уравнение принимает вид $\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}8x$, $\operatorname{tg}2x(\operatorname{tg}8x-1)=0$. Отсюда: 1) $\operatorname{tg}2x=0$, $2x_1=\pi n$, $x_1=\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$; так как $\cos 3x\neq 0$, то $n=2m$ — четное;

2) $\operatorname{tg}8x-1=0$, $\operatorname{tg}8x=1$, $8x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{\pi k}{8}=\dfrac{\pi}{32}(4k+1), k\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi m$; $x_2=\dfrac{\pi}{32}(4k+1)$, где m и $k\in Z$.

8.448. $(5+3\sin^{-2}x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде $\left(5+\dfrac{3}{\sin^2 x}\right)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y$. Левая часть этого уравнения ≥ 8, а правая ≤ 8. Таким образом, имеем

$$\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \sin^6 x=1,\\ \cos 2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\pm 1,\\ \cos 2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k=\dfrac{\pi}{2}(2k+1), k\in Z,\\ y=\pi n, n\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\pi n$, где k и $n\in Z$.

8.449. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-3\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg}x-2=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-3=0$, $\left(\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x-\right.$ $\left.-3\right)+\left(\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x\right)=0$, $\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)+\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)=0$,

$\left(\operatorname{tg}^2 x-3\right)\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1\right)=0$.

Отсюда: 1) $\operatorname{tg}^2 x-3=0$, $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1)$, $n\in Z$;

2) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1\neq 0$, $D<0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1)$, $n\in Z$.

8.450. $\cos^4 x+4\cos x-1=0$.

Решение.

Пусть $\cos x=y$, тогда уравнение принимает вид

$y^4+4y-1=0 \Leftrightarrow y^4+2y^2+1-2y^2-1+4y-1=0$,

$\left(y^2+1\right)^2-2y^2+4y-2=0$, $\left(y^2+1\right)^2-2\left(y^2-2y+1\right)=0$,

$\left(y^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}(y-1)\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(y^2+1+\sqrt{2}(y-1)\right)\left(y^2+1-\sqrt{2}(y-1)\right)=0$,

$\left(y^2+\sqrt{2}y+1-\sqrt{2}\right)\left(y^2-\sqrt{2}y+1+\sqrt{2}\right)=0$.

Отсюда: 1) $y^2+\sqrt{2}y+1-\sqrt{2}=0$, $y_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$;

2) $y^2-\sqrt{2}y+1+\sqrt{2}\neq 0$ $(D<0)$.

Таким образом, $\cos x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}<-1$, $\varnothing$;

или $\cos x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$,

$x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in Z$.

8.451. $\dfrac{1-\cos 2x+\ldots+(-1)^n\cos^n 2x+\ldots}{1+\cos 2x+\ldots+\cos^n 2x+\ldots}=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x, |\cos 2x|\neq 1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

В числителе дроби— сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=q$, $q=-\cos 2x$. В знаменателе дроби— сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=\cos 2x$.

По формуле $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ имеем $\dfrac{\dfrac{1}{1+\cos 2x}}{\dfrac{1}{1-\cos 2x}}=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x$, $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x$,

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x=0$, $\operatorname{tg}^2 x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x=0$, $\operatorname{tg}^2 x(3-\operatorname{tg}^2 x)=0$.

Отсюда: 1) $\operatorname{tg}^2 x=0$, $\operatorname{tg} x=0$, $x_1=\pi n, n\in Z$;

2) $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$, $x_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1), k\in Z$; $x_1=\pi n$ не подходит по условию.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1), k\in Z.$

8.452. $2(\operatorname{tg} x-\sin x)+3(\operatorname{ctg} x-\cos x)+5=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем $2\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)+3\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\cos x\right)+5=0$,

$$\frac{2(\sin x-\sin x\cos x)}{\cos x}+\frac{3(\cos x-\sin x\cos x)}{\sin x}+5=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x+3\cos^2 x-3\cos^2 x\sin x+5\sin x\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x+2\sin x\cos x)+$$
$$+(3\cos^2 x-3\cos^2 x\sin x+3\sin x\cos x)=0,$$

$(\sin x - \sin x\cos x + \cos x)(2\sin x + 3\cos x) = 0.$

Отсюда: 1) $\sin x - \sin x\cos x + \cos x = 0$ или 2) $2\sin x + 3\cos x = 0$.

1) $\sin x + \cos x = y,\ \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = y^2,$

$2\sin x\cos x = y^2 - 1,\ \sin x\cos x = \dfrac{y^2-1}{2}.$

Получаем $y - \dfrac{y^2-1}{2} = 0,\ y^2 - 2y - 1 = 0,\ \ y_1 = 1-\sqrt{2},\ y_2 = 1+\sqrt{2}.$

Таким образом, $\sin x + \cos x = 1+\sqrt{2} > \sqrt{2}, \varnothing$; или

$\sin x + \cos x = 1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$

$\sin x\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos x\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$

$x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2\pi l,\ \ x_1 = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2}-2}{2} + 2\pi l, l\in Z.$

2) $\mathrm{tg}x = -\dfrac{3}{2},\ \ x_2 = -\mathrm{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi n, n\in Z.$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2}-2}{2} + 2\pi l;\ x_2 = -\mathrm{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi n,$ где l и $n \in Z$.

8.453. $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{ctg}^3 x - 4 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x \ne 0,\\ \sin x \ne 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x) + (\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{ctg}^3 x) = 4,$

$(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x) + (\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x)(\mathrm{tg}^2 x - 1 + \mathrm{ctg}^2 x) = 4.$

Пусть $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = y$, тогда $\mathrm{tg}^2 x + 2 + \mathrm{ctg}^2 x = y^2,\ \ \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = y^2 - 2$. Уравнение принимает вид $y^2 - 2 + y(y^2-3) - 4 = 0,\ \ y^3 + y^2 - 3y - 6 = 0,\ \ y^3 - 2y^2 + 3y^2 - 6y + 3y - 6 = 0,\ \ y^2(y-2) + 3y(y-2) + 3(y-2) = 0,\ (y-2)(y^2+3y+3) = 0.$ Так как $y^2 + 3y + 3 \ne 0, D<0$, то $y - 2 = 0,$

$y=2,\ \ \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2,\ \ \sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\cos x,\ \ \sin 2x=1,\ \ 2x=\frac{\pi}{2}+$

$+2\pi k,\ \ x=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1),\ k\in Z.$

8.454. $\cos\sqrt{x}=\cos x.$

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0.$

Из условия имеем

$$\cos\sqrt{x}-\cos x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{x-\sqrt{x}}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x+\sqrt{x}}{2}=0,\\ \sin\frac{x-\sqrt{x}}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x+\sqrt{x}}{2}=\pi n,\\ \frac{x-\sqrt{x}}{2}=\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\sqrt{x}-2\pi n=0,\ n\in Z,\\ x-\sqrt{x}-2\pi k=0,\ k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1+8\pi n}}{2},\ n\in Z,\\ \sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2},\ k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\left(\frac{-1+\sqrt{1+8\pi n}}{2}\right)^2=\frac{1-\sqrt{1+8\pi n}}{2}+2\pi n,\ n=0;1;2;\ldots;\\ x_2=\left(\frac{1+\sqrt{1+8\pi k}}{2}\right)^2=\frac{1+\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k,\ k=0;1;2;\ldots;\\ x_3=\left(\frac{1-\sqrt{1+8\pi k}}{2}\right)^2=\frac{1-\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k,\ k=0;1;2;\ldots.\end{array}\right.$$

$$\sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{1+8\pi n}}{2}<0,\ \varnothing.$$

Ответ: $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi m}}{2}+2\pi m,\ m=0;1;2;\ldots.$

8.455. $|\sin t + \cos t| = \sqrt{2}.$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем $(\sin t + \cos t)^2 = 2,$ $\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t = 2,$ $\sin 2t = 1,$ $2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $t = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n + 1), n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4n+1), n \in Z.$

8.456. $\text{tg}^2 x \text{tg}^2 3x \text{tg} 4x = \text{tg}^2 x - \text{tg}^2 3x + \text{tg} 4x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде $\text{tg} 4x(\text{tg}^2 x \text{tg}^2 3x - 1) = \text{tg}^2 x - \text{tg}^2 3x.$

Так как $\text{tg}^2 x \text{tg}^2 3x - 1 \neq 0$, то $\text{tg} 4x = \frac{\text{tg}^2 x - \text{tg}^2 3x}{\text{tg}^2 x \text{tg}^2 3x - 1},$

$\text{tg} 4x = \frac{(\text{tg} 3x + \text{tg} x)(\text{tg} 3x - \text{tg} x)}{(1 - \text{tg} 3x \text{tg} x)(1 + \text{tg} 3x \text{tg} x)} \Leftrightarrow \text{tg} 4x = \text{tg} 4x \text{tg} 2x,$

$\text{tg} 4x(1 - \text{tg} 2x) = 0.$

Отсюда 1) $\text{tg} 4x = 0,$ $4x_1 = \pi k,$ $x_1 = \frac{\pi k}{4}, k \in Z;$ 2) $1 - \text{tg} 2x = 0,$

$\text{tg} 2x = 1,$ $2x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Учитывая ОДЗ, $x_1 = \pi k, k \in Z;$ $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z.$

Ответ: $x_1 = \pi k;$ $x_2 = \frac{\pi}{4}(2n+1),$ где k и $n \in Z.$

8.457. $\cos 6x + \sin \frac{5x}{2} = 2.$

Решение.

Так как $\cos 6x \leq 1$ и $\sin \frac{5x}{2} \leq 1,$ то получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\cos 6x=1,\\ \sin\frac{5x}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x=2\pi n,\\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5},\ k\in Z\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n=3+12k,\ 5n=3(1+4k),\ n=3t,\ t\in Z,\ 5\cdot 3t=3(1+4k),\ 5t=1+4k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t=5(1+4m),\ m\in Z,\ t=1+4m,\ m\in Z.$$

Тогда $n=3\cdot t=3(1+4m)=3+12m.$

Отсюда $x=\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi(3+12m)}{3}=\pi+4\pi m=\pi(4m+1),\ m\in Z.$

Ответ: $x=\pi(4m+1),\ m\in Z.$

8.458. $\sqrt{3}|\cos t|=1+\operatorname{ctg} t.$

Решение.

ОДЗ: $\sin t\neq 0.$

Раскрыв модуль, получим два случая:

1) $\begin{cases}-1\le\cos t<0,\\ -\sqrt{3}\cos t=1+\operatorname{ctg} t.\end{cases}$ $-\sqrt{3}\sin t\cos t=\sin t+\cos t.$

Пусть $\sin t+\cos t=y,\ \sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t=y^2,$

$\sin t\cos t=\frac{y^2-1}{2}$. Уравнение принимает вид $-\sqrt{3}\cdot\frac{y^2-1}{2}=y,$

$\sqrt{3}y^2-2y-\sqrt{3}=0,\ \ y_1=-\sqrt{3},\ \ y_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $\sin t+\cos t=-\sqrt{3},\varnothing$

$\left(-\sqrt{2}\le\sin t+\cos t\le\sqrt{2}\right)$ или $\sin t+\cos t=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\ \sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\ t+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}+\pi k,$$

$$t=(-1)^k\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $-1 \le \cos t < 0$, то $t = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\pi}{4} + \pi k = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}} +$

$+\frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z.$

2) $\begin{cases} 0 \le \cos t \le 1, \\ \sqrt{3}\cos t = 1 + \mathrm{ctg}t. \end{cases}$

Аналогичными рассуждениями, что и в первом случае, получим уравнение $\sqrt{3}\sin t\cos t = \sin t + \cos t$. Если $\sin t + \cos t = z$, то получаем уравнение $\sqrt{3}z^2 - 2z + \sqrt{3} = 0, D = -2 < 0, \varnothing$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{4}(4k-1) - \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}, k \in Z.$

8.459. $\cos^2 x^2(\mathrm{tg}x^2 + 2\mathrm{tg}x) + \mathrm{tg}^3 x(1 - \sin^2 x^2)(1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}x^2) = 0.$

Решение.

$\begin{cases} \cos x \ne 0, \\ \cos x^2 \ne 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде $\cos^2 x^2(\mathrm{tg}x^2 + 2\mathrm{tg}x) + \mathrm{tg}^3 x\cos^2 x^2(2 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}x^2) = 0.$

Так как $\cos x^2 \ne 0$, то получаем $\mathrm{tg}x^2 + 2\mathrm{tg}x + 2\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^4 x\mathrm{tg}x^2 = 0.$

$(\mathrm{tg}x^2 - \mathrm{tg}x^4\mathrm{tg}x^2) + (2\mathrm{tg}x + 2\mathrm{tg}^3 x) = 0,$ $\mathrm{tg}x^2(1 - \mathrm{tg}^4 x) + 2\mathrm{tg}x(1 + \mathrm{tg}^2 x) = 0,$ $\mathrm{tg}x^2(1 - \mathrm{tg}^2 x)(1 + \mathrm{tg}^2 x) + 2\mathrm{tg}x(1 + \mathrm{tg}^2 x) = 0,$ $(1 + \mathrm{tg}^2 x)(\mathrm{tg}x^2(1 - \mathrm{tg}^2 x) + 2\mathrm{tg}x) = 0.$ Так как $1 + \mathrm{tg}^2 x \ne 0$, то имеем $\mathrm{tg}x^2(1 - \mathrm{tg}^2 x) + 2\mathrm{tg}x = 0,$

$\mathrm{tg}x^2 = -\frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$ при $1 - \mathrm{tg}^2 x \ne 0.$

Таким образом, получим $\mathrm{tg}x^2 = -\mathrm{tg}2x$, $\mathrm{tg}x^2 + \mathrm{tg}2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(x^2 + 2x)}{\cos x^2 \cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \sin(x^2 + 2x) = 0$ при $\cos x^2 \ne 0$ и $\cos 2x \ne 0.$

Тогда $x^2 + 2x = \pi n, n \in Z,$ $x^2 + 2x - \pi n = 0, n \in Z,$ $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \pi n}$ при $n \in Z$ и $1 + \pi n \ge 0.$

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{1+\pi n}$, где $n=0;1;2;\ldots$.

8.460. $\dfrac{1-\mathrm{tg}x+\ldots+(-1)^n\mathrm{tg}^n x+\ldots}{1+\mathrm{tg}x+\ldots+\mathrm{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x, \ |\mathrm{tg}x|<1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

В числителе дроби— сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=-\mathrm{tg}x$, а в знаменателе— сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=\mathrm{tg}x$. По формуле $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ имеем $\dfrac{\frac{1}{1+\mathrm{tg}x}}{\frac{1}{1-\mathrm{tg}x}}=1+\sin 2x$,

$$\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}=1+\sin 2x\Leftrightarrow\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}=1+\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}\Leftrightarrow\ \mathrm{tg}x\left(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x+2\right)=0.$$

Отсюда: 1) $\mathrm{tg}x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$; 2) $\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x+2\neq 0$ $(D<0)$, $\varnothing$.

Ответ: $x=\pi k, k\in Z$.

8.461. $\left(\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x\right)^2-\cos(x+4\mathrm{tg}x)=-1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде $\left(\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x\right)^2+1=\cos(x+4\mathrm{tg}x)$. Левая часть этого уравнения ≥ 1, а правая — ≤ 1. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\mathrm{tg}x(1-\mathrm{tg}x)=0,\\ \cos(x+4\mathrm{tg}x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\mathrm{tg}x=0,\\ \cos(x+4\mathrm{tg}x)=1;\end{cases}\\ \begin{cases}\mathrm{tg}x=1,\\ \cos(x+4\mathrm{tg}x)=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\mathrm{tg}x=0,\\ \cos x=1;\end{cases}\\ \begin{cases}\mathrm{tg}x=1,\\ \cos(x+4)=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Из первой системы уравнений получаем $x=2\pi n, n\in Z$.

Из второй системы имеем

$$\begin{cases}\mathrm{tg}x=1,\\ \cos(x+4)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z,\\ x+4=2\pi t,\ t\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z,\\ x=-4+2\pi t,\ t\in Z.\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+\pi m=-4+2\pi t,\ 4=\pi\left(2t-m-\frac{1}{4}\right)\varnothing$, так как в левой части стоит рациональное число, а в правой— иррациональное.

Ответ: $x=2\pi n,\ n\in Z$.

8.462. $\mathrm{tg}^2x\mathrm{ctg}^2 2x\mathrm{ctg}3x=\mathrm{tg}^2x-\mathrm{ctg}^2 2x+\mathrm{ctg}3x$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$

Умножив обе части уравнения на $\cos^2 x\sin^2 2x\sin 3x\neq 0$, получим

$\sin^2 x\cos^2 2x\cos 3x=\sin^2 x\sin^2 2x\sin 3x-\cos^2 2x\cos^2 x\sin 3x+$
$+\cos 3x\cos^2 x\sin^2 2x,\ \left(\sin^2 x\cos^2 2x\cos 3x-\cos 3x\cos^2 x\sin^2 2x\right)+$
$+\left(\cos^2 2x\cos^2 x\sin 3x-\sin^2 2x\sin^2 x\sin 3x\right)=0,\ \cos 3x\times$
$\times\left(\sin^2 x\cos^2 2x-\cos^2 x\sin^2 2x\right)+\sin 3x\left(\cos^2 2x\cos^2 x-\sin^2 2x\sin^2 x\right)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\cos 3x(\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x)(\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x)+\sin 3x\times$
$\times(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x)(\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\cos 3x\sin x\sin 3x+\sin 3x\cos 3x\cos x=0,$
$-\sin 3x\cos 3x(\sin x-\cos x)=0.$

Отсюда: 1) $\cos 3x=0,\ 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}x=1,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

Учитывая ОДЗ, получаем $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\neq 3l+1,\ l\in Z;$
$x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\neq 3l+1;\ x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, где k, l и $n\in Z$.

8.463. $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+13\cos^{-2}3z$.

Решение.

ОДЗ: $\cos 3z\neq 0$.

Запишем уравнение в виде $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+\frac{13}{\cos^2 3z}$. Левая часть этого уравнения ≤ 25, а правая— ≥ 25. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4-\cos 2x=5, \\ 2+3\sin y=5, \\ 12+\frac{13}{\cos^2 3z}=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=-1, \\ \sin y=1, \\ \cos 3z=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\pi+2\pi n,\ n\in Z, \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z, \\ 3z=\pi m,\ m\in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z, \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z, \\ z=\frac{\pi m}{3},\ m\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2n+1);\ y=\frac{\pi}{2}(4k+1);\ z=\frac{\pi m}{3}$, где n, k и $m\in Z$.

8.464. $(2\sin x-1)(\cos^4 x+2\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x+1)=0.$

Решение.

Уравнение равносильно двум уравнениям: 1) $2\sin x-1=0$;

2) $\cos^4 x+2\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x+1=0.$

1) $\sin x=\frac{1}{2},\ \ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z.$

2) $\cos^2 x+2\cos x+2-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow$

$$\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+2\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)+2=0.$$

Пусть $\cos x-\frac{1}{\cos x}=y$, тогда $\cos^2 x-\frac{1}{\cos^2 x}=y^2+2$ и уравнение принимает вид $y^2+2y+4=0,\ D<0,\ \varnothing$.

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

8.465. $1+\sqrt{3}(1+\cos x)=\cos 2(x+2\operatorname{tg}x)$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0$.

Левая часть данного уравнения лежит на промежутке $[1; 1+2\sqrt{3}]$, а правая — на отрезке $[-1; 1]$. Таким образом, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases}1+\cos x=0,\\ \cos 2(x+2\operatorname{tg}x)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=-1,\\ \cos 2(x+2\operatorname{tg}x)=1\end{cases} \Leftrightarrow x=\pi+2\pi k=\pi(2k+1),$$

$k \in Z$.

Ответ: $x=\pi(2k+1), k\in Z$.

8.466. $2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\operatorname{ctg}2x=\operatorname{ctg}3x$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем $2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x}=\operatorname{ctg}3x$,

$$2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}3x,\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=\operatorname{ctg}3x,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{ctg}3x,\quad \operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}3x=0,\quad \frac{\sin\left(3x-\frac{x}{2}\right)}{\sin 3x\sin\frac{x}{2}}=0,$$

$$\sin\frac{5x}{2}=0,\quad \frac{5x}{2}=\pi n,\quad x=\frac{2\pi n}{5}, n\neq 5l, n\in Z, l\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{2\pi n}{5}, n\neq 5l$, где n и $l\in Z$.

8.467. $2\sin^2 x+\sin x+\sin^{-1}x+2\sin^{-2}x=6$.

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0$.

Запишем уравнение в виде $2\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} - 6 = 0$,

$2\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) - 6 = 0$. Пусть $\sin x + \frac{1}{\sin x} = y$, тогда

$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = y^2 - 2$ и уравнение принимает вид $2y^2 + y - 10 = 0$,

$y_1 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = 2$.

Отсюда: 1) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = -\frac{5}{2}$, $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$,

2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$, $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$.

1) $\sin x = -2, \varnothing$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x_1 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

2) $(\sin x - 1)^2 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n+1), n \in Z$.

Ответ: $x_1 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, где k и $n \in Z$.

8.468. $2\operatorname{tg}\pi t^2 - \operatorname{tg}\pi t + \operatorname{tg}\pi t \operatorname{tg}^2 \pi t^2 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos \pi t^2 \neq 0, \\ \cos \pi t \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем $-\operatorname{tg}\pi t + \operatorname{tg}\pi t \operatorname{tg}^2 \pi t^2 = -2\operatorname{tg}\pi t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\pi t\left(1 - \operatorname{tg}^2 \pi t^2\right) = 2\operatorname{tg}\pi t^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\pi t = \frac{2\operatorname{tg}\pi t^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \pi t^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\pi t = \operatorname{tg} 2\pi t^2$,

$\operatorname{tg}\pi t - \operatorname{tg} 2\pi t^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sin\left(2\pi t^2 - \pi t\right)}{\cos 2\pi t^2 \cos \pi t} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2\pi t^2 - \pi t\right) = 0$

при $\cos 2\pi t^2 \neq 0$, $\cos \pi t \neq 0$.

Тогда $2\pi t^2-\pi t=\pi k, k\in Z,$ $\begin{cases}2t^2-t-n=0,\\ n\in Z\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8k}}{4},\\ k\in Z,\\ 1+8k\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8k}}{4},\\ k=0;1;2;\dots.\end{cases}$$ Учитывая ОДЗ, находим

$t_1=0;$ $t_2=\dfrac{1+\sqrt{1+8k}}{4}, k>0, k\ne l(2l+1);$ $t_3=\dfrac{1-\sqrt{1+8k}}{4}, k\ne l(2l-1),$ $l>0$, где k и $l\in Z$.

Ответ: $t_1=0;$ $t_2=\dfrac{1+\sqrt{1+8k}}{4},$ $k>0,$ $k\ne l(2l+1);$ $t_3=\dfrac{1-\sqrt{1+8k}}{4},$ $k\ne l(2l-1), l>0$, где k и $l\in Z$.

8.469. $\sin^4 x+2\cos^3 x+2\sin^2 x-\cos x+1=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $(\sin^2 x)^2+2\cos^3 x+2(1-\cos^2 x)-$ $-\cos x+1=0,$ $(1-\cos^2 x)^2+2\cos^3 x+2-2\cos^2 x-\cos x+1=0,$

$1-2\cos^2 x+\cos^4 x+2\cos^3 x-2\cos^2 x-\cos x+3=0,$

$\cos^4 x+2\cos^3 x-4\cos^2 x-\cos x+4=0,$

$(\cos^4 x+\cos^3 x)+(\cos^3 x-\cos x)-4(\cos^2 x-1)=0,$

$\cos^3 x(\cos x+1)+\cos x(\cos x-1)(\cos x+1)-4(\cos x-1)(\cos x+1)=0,$

$(\cos x+1)(\cos^3 x+\cos^2 x-5\cos x+4)=0.$

Отсюда: 1) $\cos x+1=0, \cos x=-1, x=\pi+2\pi k=\pi(2k+1), k\in Z;$

2) $\cos^3 x+\cos^2 x-5\cos x+4=0.$

Пусть $\cos x=y$, тогда $y^3+y^2-5y+4=0$. Рассмотрим функцию $z=y^3+y^2-5y+4,$ $-1\le y\le 1.$ $z(-1)=9,$ $z(1)=1.$

Производная $z'=3y^2+2y-5=3(y-1)\left(y+\dfrac{5}{3}\right)\le 0$ при $y\in[-1,1]$ и функция z — монотонно убывает на отрезке $[-1, 1]$ и экстремумов не имеет. Так как $z(1)>0$, то $z\neq 0$, т.е. наше уравнение корней не имеет.

Ответ: $x=\pi(2k+1),\ k\in Z.$

8.470. $|\sin t|+|\cos t|=1{,}4.$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем $\sin^2 t+2|\sin t|\cdot|\cos t|+$ $+\cos^2 t=1{,}96\Leftrightarrow|2\sin t\cos t|=0{,}96,\ |\sin 2t|=0{,}96\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sin^2 2t=0{,}9216\Leftrightarrow\frac{1-\cos 4t}{2}=0{,}9216\Leftrightarrow\cos 4t=-0{,}8432\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t=\pm\arccos(-0{,}8432)+2\pi k,\ t=\frac{\pm\arccos(-0{,}8432)}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $t=\dfrac{\pm\arccos(-0{,}8432)}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

8.471. $\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{2-\cos^{-2}x}=\dfrac{4+2\cos\frac{6}{5}x}{\cos 3x+\cos x}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos 3x+\cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ 2\cos 2x\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{2-(1+\operatorname{tg}^2 x)}=\dfrac{2\left(2+\cos\frac{6}{5}x\right)}{2\cos 2x\cos x}$,

$$\frac{2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2+\cos\frac{6}{5}x}{\cos 2x\cos x},\quad \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg}x=\frac{2+\cos\frac{6}{5}x}{\cos 2x\cos x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x=\frac{2+\cos\frac{6}{5}x}{\cos 2x\cos x},\ \frac{\sin 3x}{\cos 2x\cos x}=\frac{2+\cos\frac{6}{5}x}{\cos 2x\cos x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin 3x=2+\cos\frac{6}{5}x\Leftrightarrow\sin 3x-\cos\frac{6}{5}x=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x=1,\\ \cos\frac{6}{5}x=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos\frac{6}{5}x = -1; \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}, m \in Z, \\ x = \frac{5}{6}\pi + \frac{5\pi n}{3}, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, l \in Z \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3} = \frac{5}{6}\pi + \frac{5\pi n}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 + 4m = 5 + 10n,\ 4m = 4 + 10n,\ 2m = 2 + 5n \Rightarrow n = 2p$, где $p \in Z$, т.е. $2m = 2 + 5 \cdot 2p,\ \ m = 1 + 5p$, где $p \in Z$.

Отсюда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(1+5p)}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{10\pi p}{3} = \frac{5\pi}{6} + \frac{10\pi p}{3}$, $p \in Z$.

Далее, из неравенств системы получаем $\frac{5\pi}{6} + \frac{10\pi p}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5 + 20p \neq 3 + 6k,\ 20p \neq -2 + 6k,\ 10p \neq -1 + 3k \Rightarrow k = 10r$, где $r \in Z$, т.е. $10p = -1 + 3(10r + 7) = -1 + 30r + 21 = 30r + 20 = 10(3r + 2),\ p = 3r + 2$. Таким образом, $x = \frac{5\pi}{6} + \frac{10\pi p}{3}$, где $p \in Z$ и $p \neq 3r + 2$.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + \frac{10\pi p}{3} = \frac{5\pi}{6}(1 + 4p)$, где $p \in Z$ и $p \neq 3r + 2$.

8.472. $12\cos^{-2} x + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^2 x + 10\left(2\mathrm{tg}x + \frac{\mathrm{ctg}x}{3}\right) = 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^2 x + 10\left(2\mathrm{tg}x + \frac{\mathrm{ctg}x}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12 + 12\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^2 x + 10\left(2\mathrm{tg}x + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}x\right) = 1.$$

Пусть $2\mathrm{tg}x + \frac{\mathrm{ctg}x}{3} = y$, тогда $4\mathrm{tg}^2 x + \frac{4}{3} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{9} = y^2, 12\mathrm{tg}^2 x + 4 +$

$+\frac{\text{ctg}^2x}{3}=3y^2$, $12+12\text{tg}^2x+\frac{\text{ctg}^2x}{3}=3y^2+8$. Относительно y уравнение принимает вид $3y^2+8+10y=1$, $3y^2+10y+7=0$, $y_1=-\frac{7}{3}$, $y_2=-1$.

Отсюда: 1) $2\text{tg}x+\frac{\text{ctg}x}{3}=-\frac{7}{3}$, $6\text{tg}^2x+7\text{tg}x+1=0$, $(\text{tg}x)_1=-1$;

$(\text{tg}x)_2=-\frac{1}{6}$; $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; $x_2=-\text{arctg}\frac{1}{6}+\pi n, n\in Z$.

2) $2\text{tg}x+\frac{\text{ctg}x}{3}=-1$, $6\text{tg}^2x+3\text{tg}x+1=0; \varnothing\ (D<0)$.

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=-\text{arctg}\frac{1}{6}+\pi n$, где k и $n\in Z$.

8.473. $\sin^5x+\cos^5x=2-\sin^4x$.

Решение.

Левая часть уравнения ≤ 1, а правая — ≥ 1. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^5x+\cos^5x=1,\\ 2-\sin^4x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^5x+\cos^5x=1,\\ \sin x=\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0,\\ \sin x=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n+1), n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(4n+1), n\in Z$.

8.474. $3\text{tg}2x-4\text{tg}3x=\text{tg}^2 3x\,\text{tg}2x$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\ne 0,\\ \cos 3x\ne 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $3\text{tg}2x-3\text{tg}3x=\text{tg}^2 3x\,\text{tg}2x+\text{tg}3x$,

$$3(\text{tg}2x-\text{tg}3x)=\text{tg}3x(\text{tg}3x\,\text{tg}2x+1)\Leftrightarrow\frac{-3\sin x}{\cos 2x\cos 3x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\left(\frac{\sin 3x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x}+1\right),$$

$$\frac{-3\sin x}{\cos 2x\cos 3x}=\frac{\sin 3x(\sin 3x\sin 2x+\cos 3x\cos 2x)}{\cos^2 3x\cos 2x}\Leftrightarrow -3\sin x=$$

$$=\frac{\sin 3x\cos x}{\cos 3x}\Leftrightarrow -3\sin x=\frac{(3\sin x-4\sin^3x)\cos x}{4\cos^3x-3\cos x},\ \frac{\sin x(3-4\sin^2x)\cos x}{\cos x(4\cos^2x-3)}+$$

$+3\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\cdot\left(\dfrac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x-3}+3\right)=0.$

Отсюда: 1) $\sin x=0,\ x_1=\pi n,\ n\in Z$; 2) $\dfrac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x-3}+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-4\sin^2 x+12\cos^2 x-9=0,\ 2\sin^2 x-6\cos^2 x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-6\cos^2 x+3(\sin^2 x+\cos^2 x)=0,\ 5\sin^2 x-3\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x=\dfrac{3}{5},\ \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}},\ x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{5}}+k,\ k\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi n;\ x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\pi k$, где n и $k\in Z$.

8.475. $\operatorname{ctg}2\pi t^2+\operatorname{ctg}4\pi t=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2\pi t^2\neq 0,\\ \sin 4\pi t\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем $\dfrac{\sin(2\pi t^2+4\pi t)}{\sin 2\pi t^2\sin\pi t}=0 \Leftrightarrow \sin(2\pi t^2+4\pi t)=0,$

$2\pi t^2+4\pi t=\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow 2t^2+4t-n=0,\ n\in Z;\ t_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+2n}}{2},\ n\in Z,$

$4+2n\geq 0$, или $t_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+2n}}{2}$, где $n=-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ldots$. Учитывая

ОДЗ, $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+2n}}{2},\ n\geq -1,\ n\neq 2(l^2-1)$, n и $l\in Z$.

Ответ: $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+2n}}{2},\ n\geq -1,\ n\neq 2(l^2-1)$, n и $l\in Z$.

8.476. $(3-\operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x+\cos x)=\dfrac{4\cos 3x}{\operatorname{tg}2x}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0.\end{cases}$

Из условия получаем:

$$\left(3-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot 2\cos 2x\cos x=\frac{4\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)}{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}},$$

$$\frac{\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot 2\cos 2x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{4\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)\cdot\cos 2x}{2\sin x\cos x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x}=\frac{4\cos^2 x-3}{\sin x},\ \frac{3-4\sin^2 x}{\cos x}=\frac{4\cos^2 x-3}{\sin x}.$$

$$3\sin x-4\sin^3 x=4\cos^3 x-3\cos x\Leftrightarrow\sin 3x=\cos 3x\Leftrightarrow \mathrm{tg}3x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.$$

Учитывая ОДЗ, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{12}(4n+1),\ n\neq 3l+2$, где n и $l\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(4n+1),\ n\neq 3l+2$, где n и $l\in Z$.

8.477. $\dfrac{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots}=\dfrac{4}{1+\mathrm{tg}^2 t},\ |\sin t|\neq 1.$

Решение.

ОДЗ: $\cos t\neq 0$.

В числителе имеем сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=1,\ q=\sin t$, а в знаменателе — сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=1,\ q=-\sin t$. По формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$ находим $\dfrac{\dfrac{1}{1-\sin t}}{\dfrac{1}{1+\sin t}}=\dfrac{4}{1+\mathrm{tg}^2 t}$,

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\frac{4}{1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}},\ \frac{1+\sin t}{1-\sin t}-\frac{4\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=0,$$

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}-4\left(1-\sin^2 t\right)=0,\ \frac{1+\sin t}{1-\sin t}-4(1-\sin t)(1+\sin t)=0,$$

$$(1+\sin t)\cdot\left(\frac{1}{1-\sin t}-4(1-\sin t)\right)=0.$$

Отсюда: 1) $1+\sin t=0$, $\sin t=-1$, не подходит, т.к. $\cos t\neq 0$;

2) $\frac{1}{1-\sin t}-4(1-\sin t)=0\Leftrightarrow 1-4(1-\sin t)^2=0$, $(1-\sin t)^2=\frac{1}{4}$. Таким образом: $1-\sin t=\frac{1}{2}$ или $1-\sin t=-\frac{1}{2}$.

Отсюда: $\sin t=\frac{1}{2}$, $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; $\sin t=\frac{3}{2}>1, \varnothing$.

Ответ: $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$

8.478. $|\mathrm{tg}2t+\mathrm{ctg}2t|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2t\neq 0,\\ \sin 2t\neq 0.\end{cases}$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим $\mathrm{tg}^2 2t+2+\mathrm{ctg}^2 2t=\frac{16}{3}$, $\mathrm{tg}^2 2t+\frac{1}{\mathrm{tg}^2 2t}-\frac{10}{3}=0\Leftrightarrow 3\mathrm{tg}^4 2t-10\mathrm{tg}^2 2t+3=0$,

$(\mathrm{tg}2t)_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2t_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, t_1=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; $(\mathrm{tg}2t)_2=\pm\sqrt{3}$,

$2t_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $t_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; *объединяя решения, находим* $t=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi l}{4}=\frac{\pi}{12}(3l\pm 1), l\in Z.$

Ответ: $t=\frac{\pi}{12}(3l\pm 1), l\in Z.$

8.479. $(3-\sin x)(4-\sin^{-2}x)=12+\cos^2 y.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде $(3-\sin x)\cdot\left(4-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=12+\cos^2 y.$

Левая часть уравнения ≤ 12, а правая ≥ 12. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}3-\sin x=4,\\ 4-\dfrac{1}{\sin^2 x}=3,\\ 12+\cos^2 y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=-1,\\ \sin^2 x=1,\\ \cos y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n=\dfrac{\pi}{2}(4n-1),\ n\in Z,\\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}(4n-1);\ \ y=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, где n и $k\in Z$.

8.480. $4-4(\cos z-\sin z)-\sin 2z=0.$

Решение.

Из условия имеем $4-4(\cos z-\sin z)-2\sin z\cos z=0$. Пусть $\cos z-\sin z=y$, $\cos^2 z-2\cos z\sin z+\sin^2 z=y^2$, $-2\sin z\cos z=\dfrac{y^2-1}{2}$.

Тогда уравнение принимает вид $4-4y+\dfrac{y^2-1}{2}=0$, $y^2-8y+7=0$,

$y_1=7$, $y_2=1$. $\cos z-\sin z=7, \varnothing$; $\cos z-\sin z=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\sin\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, $\sin\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z-\dfrac{\pi}{4}=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k$,

$z_1=2\pi n,\ \ n\in Z$; $z_2=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l=\dfrac{\pi}{2}(4l-1),\ l\in Z.$

Ответ: $z_1=2\pi n$; $z_2=\dfrac{\pi}{2}(4l-1)$, где n и $l\in Z$.

8.481. $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\operatorname{tg}t=2\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{4}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos\dfrac{t}{4}\ne 0,\\ \cos\dfrac{t}{2}\ne 0,\\ \cos t\ne 0,\\ \sin\dfrac{t}{4}\ne 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg}\frac{t}{4}-\operatorname{ctg}\frac{t}{4}+2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3}$,

$$\frac{\sin\frac{t}{4}}{\cos\frac{t}{4}}-\frac{\cos\frac{t}{4}}{\sin\frac{t}{4}}+2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\sin^2\frac{t}{4}-\cos^2\frac{t}{4}}{\cos\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}}+2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3},$$

$$-2\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3}\Leftrightarrow-2\cdot\left(\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\right)+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3},$$

$$-2\cdot\frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3},\ -4\operatorname{ctg}t+4\operatorname{tg}t=8\sqrt{3},$$

$$-\left(\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{\sin t}{\cos t}\right)=2\sqrt{3},\ -\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\sin t\cos t}=2\sqrt{3},\ -2\operatorname{ctg}2t=2\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}2t=-\sqrt{3},\ 2t=\frac{5}{6}\pi+\pi n,\ t=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{12}(6n+5),\ n\in Z.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{12}(6n+5),\ n\in Z.$

8.482. $\frac{3\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}^3 t}{1-\operatorname{tg}^2 t}\cdot(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos t\neq 0,\\ \operatorname{tg}t\neq\pm 1.\end{cases}$

Из условия имеем $\frac{\frac{3\sin t}{\cos t}-\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}}{1-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)\cos^2 t}{(\cos^2 t-\sin^2 t)\cos^3 t}\cdot 2\cos 2t\cos t=2\sin 5t.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $\dfrac{3\sin t\left(1-\sin^2 t\right)-\sin^3 t}{\cos 2t}\cdot\cos 2t=\sin 5t$,

$\sin 3t=\sin 5t,\ \ \sin 5t-\sin 3t=0 \Leftrightarrow\ 2\sin t\cos 4t=0.$

Отсюда или $\sin t=0,\ \ t_1=\pi n,\ \ \ n\in Z,$ или $\cos 4t=0,\ \ 4t=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,$

$t_2=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}=\dfrac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z.$

Ответ: $t_1=\pi n;\ t_2=\dfrac{\pi}{8}(2k+1),$ где n и $k\in Z.$

8.483. $\operatorname{tg}x-\sin 2x-\cos 2x+2\left(2\cos x-\cos^{-1}x\right)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x\right)-\cos 2x+2\left(2\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)=0,$$

$$\frac{-\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)}{\cos x}-\cos 2x+\frac{2\left(2\cos^2 x-1\right)}{\cos x}=0,$$

$$\frac{-\sin x\cos 2x}{\cos x}-\cos 2x+\frac{2\cos 2x}{\cos x}=0,\ \ -\cos 2x\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1-\frac{2}{\cos x}\right)=0.$$

Отсюда: 1) $\cos 2x=0,\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}=\dfrac{\pi}{4}(2n+1),\ n\in Z;$

2) $\dfrac{\sin x}{\cos x}+1-\dfrac{2}{\cos x}=0\Leftrightarrow \sin x+\cos x=2,\ \varnothing.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}(2n+1),\ n\in Z.$

8.484. $5\sin 2z-11(\sin z+\cos z)+7=0.$

Решение.

Из условия имеем $10\sin z\cos z-11(\sin z+\cos z)+7=0.$ Пусть $\sin z+$ $+\cos z=y,\ \sin^2 z+2\sin z\cos z+\cos^2 z=y^2,\ 2\sin z\cos z=y^2-1.$ Получаем уравнение $5(y^2-1)-11y+7=0,\ 5y^2-11y+2=0,\ y_1=2,\ y_2=\frac{1}{5}$. Отсюда: 1) $\sin z+\cos z=2, \varnothing$; 2) $\sin z+\cos z=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$,

$\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10},\ z-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi n,\ z=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+$

$+2\pi n, n\in Z.$

Ответ: $z=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi n, n\in Z.$

8.485. $\sin^{-1}5x-\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 5x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде $\frac{1}{\sin 5x}=\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \frac{1}{\sin 5x}=\frac{\cos x}{\sin x}+$ $+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}},\ \frac{1}{\sin 5x}=\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\sin x\cos\frac{x}{2}}\Leftrightarrow\ \frac{1}{\sin 5x}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin x\cos\frac{x}{2}}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sin 5x}=\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow\sin 5x=\sin x, \sin 5x-\sin x=0\Leftrightarrow\ 2\cos 3x\sin 2x=0.$

Отсюда: 1) $\cos 3x=0, 3x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$; 2) $\sin 2x=0$, $2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=0,\ \ x_2=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; $\sin x=0$ не подходит по ОДЗ. Подставив значения x_1 и x_2 в условие, получаем $x=\frac{\pi}{6}+$ $+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{6}(2n+1), n\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{2}+\pi k$ не удовлетворяет условию.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(2n+1),\ n\in Z$.

8.486. $4\cos^2 2t-\operatorname{tg}4t=\operatorname{ctg}2t$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 4t\neq 0,\\ \sin 2t\neq 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $4\cos^2 2t-(\operatorname{ctg}2t+\operatorname{tg}4t)=0$,

$$4\cos^2 2t-\left(\frac{\cos 2t}{\sin 2t}+\frac{\sin 4t}{\cos 4t}\right)=0,$$

$$4\cos^2 2t-\frac{\cos 4t\cos 2t+\sin 4t\sin 2t}{\sin 2t\cos 4t}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t-\frac{\cos 2t}{\sin 2t\cos 4t}=0,\ \cos 2t\left(4\cos 2t-\frac{1}{\sin 2t\cos 4t}\right)=0.$$

Отсюда: 1) $\cos 2t=0,\ 2t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ t_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1),\ n\in Z$;

2) $4\cos 2t-\frac{1}{\sin 2t\cos 4t}=0\Leftrightarrow 4\sin 2t\cos 2t\cos 4t-1=0$,

$2\sin 4t\cos 4t-1=0,\ \sin 8t=1,\ 8t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$t_2=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{16}(4k+1),\ k\in Z$.

Ответ: $t_1=\frac{\pi}{4}(2n+1)$; $t_2=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, где n и $k\in Z$.

8.487. $\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin x\neq \pm 1.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin^2 x\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\cos^2 x\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x(1-\sin^2 x)}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^6 x-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x-1)=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\pm 1,$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.488. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=\frac{29}{64}.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(\sin^2 x)^5+(\cos^2 x)^5=\frac{29}{64} \Leftrightarrow \frac{(1-\cos 2x)^2}{32}+\frac{(1+\cos 2x)^5}{32}=\frac{29}{64},$$

$$(1-\cos 2x)^5+(1+\cos 2x)^5=\frac{29}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x+1+\cos 2x)((1-\cos 2x)^4-(1-\cos 2x)^3(1+\cos 2x)+$$

$$+(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2-(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^3+(1+\cos 2x)^4)=\frac{29}{2},$$

$$2\left((1-\cos 2x)^4+(1+\cos 2x)^4-(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\left((1-\cos 2x)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1+\cos 2x)^2\right)+(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2\right)=\frac{29}{2}\Leftrightarrow 2\left(\left((1-\cos 2x+1+\cos 2x)^2-\right.\right.$$
$$-2(1-\cos 2x)(1+\cos 2x))^2-2(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2-(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\times$$
$$\times\left((1-\cos 2x+1+\cos 2x)^2-2(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\right)+$$
$$\left.+(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)^2\right)=\frac{29}{2},$$
$$2\left(\left(4-2\left(1-\cos^2 2x\right)\right)^2-\left(1-\cos^2 2x\right)^2-\left(1-\cos^2 2x\right)\left(4-2\left(1-\cos^2 2x\right)\right)\right)=\frac{29}{2},$$
$$2\left(\left(4-2\sin^2 2x\right)^2-\sin^4 2x-\sin^2 2x\left(4-2\sin^2 2x\right)\right)=\frac{29}{2}.$$

Пусть $\sin^2 2x=y$, тогда уравнение имеет вид $2\left((4-2y)^2-y^2-\right.$ $\left.-y(4-2y)\right)-\frac{29}{2}=0,\ 4y^2-16y+7=0,\ y_1=\frac{7}{2},\ y_2=\frac{1}{2}.$

Отсюда: $\sin^2 2x=\frac{7}{2}, \varnothing;\ \sin^2 2x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{1}{2}, \cos 4x=0,$ $4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi}{8}(2n+1), n\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(2n+1), n\in Z.$

8.489. $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$

Решение.

Запишем уравнение в виде $4\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right),$

$$4\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right).$$

Левая часть этого уравнения ≤ 4, а правая — ≥ 4. Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=4,\\ 5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1,\\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\right)=1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)=-1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{3}+2x=\pi+2\pi n, \\ \frac{\pi}{3}+4x=\pi+2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z, \\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6}+\pi n=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},$$

$2n=k,\ \ n=m, k=2m, m\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6m+1), m\in Z.$

8.490. $\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{tg}^3x+\mathrm{ctg}^3x=6.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x\neq 0, \\ \sin x\neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\mathrm{tg}^3x+\frac{1}{\mathrm{tg}^3x}\right)+\left(\mathrm{tg}^2x+\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}\right)+\left(\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}\right)-6=0.$$

Пусть $\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}=z,\ \mathrm{tg}^2x+\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}=z^2-2,\ \mathrm{tg}^3x+\frac{1}{\mathrm{tg}^3x}=z^3-3z,$ тогда имеем уравнение $z^3+z^2-2z-8=0,\ (z^3-8)+(z^2-2z)=0,\ (z-2)(z^2+2z+4)+z(z-2)=0,\ (z-2)(z^2+3z+4)=0.$ Отсюда: 1) $z-2=0,\ z=2;$ 2) $z^2+3z+4\neq 0, \varnothing\ (D<0).$ Получили $\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}=2,\ \mathrm{tg}^2x-2\mathrm{tg}x+1=0,$ $(\mathrm{tg}x-1)^2=0,\ \mathrm{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1), n\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4n+1), n\in Z.$

8.491. $\log_{0,5\sin 2x}\sin x=\frac{1}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \cos x < 1. \end{cases}$

Переходя к основанию $\sin x$, получаем $\dfrac{\log_{\sin x} \sin x}{\log_{\sin x} 0{,}5 \sin 2x} = \dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{\log_{\sin x} \sin x \cos x} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\log_{\sin x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x} = \dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{1 + \log_{\sin x} \cos x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \log_{\sin x} \cos x = 2$, $\log_{\sin x} \cos x = 1$,

$\cos x = \sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Учитывая ОДЗ, находим

$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m = \dfrac{\pi}{4}(8m + 1)$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4}(8m + 1)$, $m \in Z$.

8.492. $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = \dfrac{1}{4}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \cos x < 1. \end{cases}$

Переходя к основанию $\sin x$, получаем:

$\dfrac{\log_{\sin x} \sin x \cdot \log_{\sin x} \cos x}{\log_{\sin x^2} \sin x \cos x} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{\log_{\sin x} \cos x}{(1 + \log_{\sin x} \cos x)^2} - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \log_{\sin x} \cos x - \left(1 + 2 \log_{\sin x} \cos x + \log_{\sin x}^2 \cos x\right) = 0$,

$\log_{\sin x}^2 \cos x - 2 \log_{\sin x} \cos x + 1 = 0$, $(\log_{\sin x} \cos x - 1)^2 = 0$,

$\log_{\sin x} \cos x = 1$, $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Учитывая ОДЗ, получаем $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k = \dfrac{\pi}{4}(8k + 1)$, $k \in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ k\in Z$.

8.493. Показать, что уравнение $2\operatorname{ctg}2x-3\operatorname{ctg}3x=\operatorname{tg}2x$ не имеет корней.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x\ne 0,\\ \sin 3x\ne 0\\ \cos 2x\ne 0.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $2\operatorname{ctg}2x-3\operatorname{ctg}3x=\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}3x$,

$$2(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}3x)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x},$$

$$2(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}3x)=\frac{\sin 3x\sin 2x+\cos 3x\cos 2x}{\cos 2x\sin 3x},$$

$$\frac{2\sin x}{\sin 2x\sin 3x}=\frac{\cos x}{\cos 2x\sin 3x},\ \frac{2\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{\cos x}{\cos 2x},\ \frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{2\cos^2 x-1}.$$

$2\cos^2 x-1=\cos^2 x$, $\cos^2 x=1$, $\cos x=\pm 1$, $x=\pi n$, $n\in Z$, $x=\pi n$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: нет решений.

Решить системы уравнений (**8.494–8.499**):

8.494. $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y,\\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\ne 0,\\ \cos x\ne 0.\end{cases}$

Имеем

$\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x-1}{\sin x}=\sin y,\\ \dfrac{\cos^2 x-1}{\cos x}=\cos y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos^2 x=\sin y\sin x,\\ -\sin^2 x=\cos y\cos x,\end{cases}$ откуда после почленного сложения и вычитания уравнений получим

$$\begin{cases}\cos y\cos x+\sin y\sin x=-1,\\ \cos y\cos x-\sin y\sin x=\cos 2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x-y)=-1,\\ \cos(x+y)=\cos 2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\pi+2\pi n,\\ \left[\begin{array}{l}3x+y=2\pi t,\\ x-y=2\pi r.\end{array}\right.\end{cases}$$

1) $\begin{cases} x-y=\pi+2\pi n, \\ x-y=2\pi r \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$

2) $\begin{cases} x-y=\pi+2\pi n, \\ 3x+y=2\pi t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(t+n), \\ y=-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(t-3n). \end{cases}$

Пусть $k = t + n$. Тогда $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, \\ y=-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}(k-4n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1), \\ y=\dfrac{\pi}{4}(2k+5)+2\pi n. \end{cases}$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}(2k+1),\ y=\dfrac{\pi}{4}(2k+5)+2\pi n,\ k$ и $n\in Z$.

8.495. $\begin{cases} 3\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x=\sin y. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x\neq 0, \\ \cos y\neq 0. \end{cases}$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \dfrac{3\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^3 y}{\cos^3 y}, \\ \cos x=2\sin y\cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{6\sin y\cos y}{\sin x}-\frac{\sin^3 y}{\cos^3 y}=0,\ \sin y\left(\frac{6\cos y}{\sin x}-\frac{\sin^2 y}{\cos^3 y}\right)=0.$$

1) $\sin y=0, y_1=\pi k_1, k_1\in Z \Rightarrow \cos x=0, x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k_2, k_2\in Z.$

2) $\begin{cases} \dfrac{6\cos y}{\sin x}-\dfrac{\sin^2 y}{\cos^3 y}=0, \\ \cos x=2\sin y\cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6\cos y}{\sin x}-\dfrac{1-\cos^2 y}{\cos^3 y}=0, \\ \cos x=2\sin y\cos y. \end{cases}$

Возведя второе уравнение системы в квадрат, получим:

$\cos^2 x=4\sin^2 y\cos^2 y,\ 1-\sin^2 x=4\sin^2 y\cos^2 y,$

$\sin^2 x=1-4\sin^2 y\cos^2 y=1-\sin^2 2y=\cos^2 2y,$

$\sin x=\pm\cos 2y=\pm(2\cos^2 y-1).$

а) $\sin x=2\cos^2 y-1 \Rightarrow \dfrac{6\cos y}{2\cos^2 y-1}-\dfrac{1-\cos^2 y}{\cos^3 y}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\cos^4 y - 3\cos^2 y + 1 = 0, \varnothing.$

b) $\sin x = -\left(2\cos^2 y - 1\right) \Rightarrow \dfrac{6\cos y}{1-2\cos^2 y} - \dfrac{1-\cos^2 y}{\cos^3 y} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 y + 3\cos^2 y - 1 = 0 \Leftrightarrow \ \cos^2 y = \dfrac{1}{4}, \ \cos y = \pm\dfrac{1}{2},$

$y_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k_3, \ k_3 \in Z.$ Так как $\cos^2 y = \dfrac{1}{4}$, то $1 - \sin^2 y = \dfrac{1}{4},$

$\sin^2 y = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 y = \dfrac{1}{4},$

$\sin^2 y = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 x = 4 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}, \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k_4, k_4 \in Z.$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2}\left(2k_2 + 1\right), y_1 = \pi k_1; \ x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k_4, y_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k_3,$ где $k_1, \ k_2, \ k_3$ и $k_4 \in Z.$

8.496. $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos\dfrac{y}{2} \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} + \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} + \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{3}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)=\sqrt{3}\left(1-\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right)+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right),$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)=\sqrt{3}\left(1-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^2+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right),$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)=\sqrt{3}\left(1-\frac{4}{3}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}-3=0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=-3$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1}{3}$. Получили два случая:

$$1)\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=-3,\end{cases}\quad \text{или } 2)\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Имеем:

$$1)\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}},\end{cases}\quad \text{или } 2)\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k,\ k\in Z,\\ y_1=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi m,\ m\in Z,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n,\ n\in Z,\\ y_2=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi l,\ l\in Z;\end{cases}$$

2) $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\frac{\pi}{3}+2\pi t, t\in Z, \\ y_3=\frac{\pi}{3}+2\pi p, p\in Z. \end{cases}$

Ответ: $x_1=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k, k\in Z,\ y_1=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi m,$ $m\in Z;\ x_2=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n, n\in Z,\ y_2=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi l,$ $l\in Z;\ x_3=\frac{\pi}{3}+2\pi t, t\in Z,\ y_3=\frac{\pi}{3}+2\pi p, p\in Z.$

8.497. $\begin{cases} \cos x-\cos y=\sin(x+y), \\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Решение.

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}-\sin(x+y)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(\sin\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(\sin\frac{x-y}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+y}{2}\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x+y}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x+y}{2}=0, \\ \sin\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0, \\ \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0. \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x+y}{2}=\pi m,\\ \frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi n,\\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi l\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=2\pi m,\ m\in Z,\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+y=2\pi m,\ m\in Z,\\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,\\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z,\\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Первая система имеет решения, если $m=0$.

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=0,\\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-x,\\ 2|x|=\frac{\pi}{4};\end{array}\right. \ |x|=\frac{\pi}{8};\ \ x_1=-\frac{\pi}{8},\ \ x_2=\frac{\pi}{8}\Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1=-x_1=\frac{\pi}{8},\ \ y_2=-x_2=-\frac{\pi}{8}$. Вторая и третья системы решений не имеют.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{8},\ \ y=\mp\frac{\pi}{8}$.

8.498. $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2\sin\left(y-\frac{3\pi}{4}\right),\\ \operatorname{tg}y+\operatorname{ctg}y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{array}\right.$

Решение.

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l}\sin 2x\neq 0,\\ \sin 2y\neq 0,\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}2x\neq\pi n_1,\ x\neq\frac{\pi n_1}{2},\ n_1\in Z,\\ 2y\neq\pi n_2,\ y\neq\frac{\pi n_2}{2},\ n_2\in Z.\end{array}\right.$

Запишем данную систему уравнений в виде

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2\left(\sin y\cos\frac{3\pi}{4}-\cos y\sin\frac{3\pi}{4}\right),\\ \frac{\sin y}{\cos y}+\frac{\cos y}{\sin y}=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right).\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=-\sqrt{2}(\sin y+\cos y). \\ \dfrac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin y\cos y}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x\cos x}=-\sqrt{2}(\sin y+\cos y), \\ \dfrac{1}{\sin y\cos y}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x) \end{cases}$$

Пусть $\sin x+\cos x=t$, тогда $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$,

$1+2\sin x\cos x=t^2$, $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Аналогично, если $\sin y+\cos y=z$, то $\sin y\cos y=\dfrac{z^2-1}{2}$. Таким образом, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{t^2-1}{2}}=-\sqrt{2}\cdot z, \\ \dfrac{1}{\frac{z^2-1}{2}}=\sqrt{2}\cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{t^2-1}=-z, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{z^2-1}=t. \end{cases}$$

В этой системе $t,z\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, t^2-1, $z^2-1\in[-1;1]$. Таким образом, если $t^2-1, z^2-1\in(-1;1)$, то система решений не имеет.

Если $t=0$, то $z=\sqrt{2}$, что не удовлетворяет второму уравнению системы.

При $t=-\sqrt{2}$ имеет $z=-\sqrt{2}$, что не подходит второму уравнению системы.

Если $t=\sqrt{2}$, то $z=-\sqrt{2}$ и это единственное решение системы.

Получили:

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=\sqrt{2}, \\ \sin y+\cos y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z, \\ y=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k_1,\ k_1\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k_1+1)$, где k и $k_1\in Z$.

8.499. $\begin{cases} 2\cos x = 3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0, \\ \cos z \neq 0. \end{cases}$

Перепишем системы в следующем виде:

$$\begin{cases} \cos x \operatorname{ctg} y = \frac{3}{2}, \\ \cos y \operatorname{ctg} z = \frac{3}{2}, \\ \cos z \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x \operatorname{ctg}^2 y = \frac{9}{4}, \\ \cos^2 y \operatorname{ctg}^2 z = \frac{9}{4}, \\ \cos^2 z \operatorname{ctg}^2 x = \frac{9}{4}, \\ \cos x \operatorname{ctg} y > 0, \\ \cos y \operatorname{ctg} z > 0, \\ \cos z \operatorname{ctg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x \cdot \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{9}{4}, \\ \cos^2 y \cdot \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{9}{4}, \\ \cos^2 z \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{9}{4}, \\ \cos x \operatorname{ctg} y > 0, \\ \cos y \operatorname{ctg} z > 0, \\ \cos z \operatorname{ctg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x \cdot \frac{\cos^2 y}{1-\cos^2 y} = \frac{9}{4}, \\ \cos^2 y \cdot \frac{\cos^2 z}{1-\cos^2 z} = \frac{9}{4}, \\ \cos^2 z \cdot \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{9}{4}, \\ \cos x \operatorname{ctg} y > 0, \\ \cos y \operatorname{ctg} z > 0, \\ \cos z \operatorname{ctg} x > 0. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \cos^2 x = u > 0, \\ \cos^2 y = v > 0, \\ \cos^2 z = t > 0. \end{cases}$

Тогда имеем

$$\begin{cases} u\cdot\dfrac{v}{1-v}=\dfrac{9}{4}, \\ v\cdot\dfrac{t}{1-t}=\dfrac{9}{4}, \\ t\cdot\dfrac{u}{1-u}=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow t=\frac{9(1-u)}{4u},\ v\cdot\frac{\frac{9(1-u)}{4u}}{1-\frac{9(1-u)}{4u}}=\frac{9}{4}\Rightarrow v=\frac{13u-9}{4(1-u)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u\cdot\frac{\frac{13u-9}{4(1-u)}}{1-\frac{13u-9}{4(1-u)}}=\frac{9}{4},\ 4u^2+9u-9=0\Rightarrow u=\frac{3}{4}.$$

Тогда $v=\dfrac{13\cdot\frac{3}{4}-9}{4\left(1-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3}{4}$ и $t=\dfrac{9\left(1-\frac{3}{4}\right)}{4\cdot\frac{3}{4}}=3.$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} \cos^2 x=\dfrac{3}{4}, \\ \cos^2 y=\dfrac{3}{4}, \\ \cos^2 z=\dfrac{3}{4}, \\ \cos x\operatorname{ctg} y>0, \\ \cos y\operatorname{ctg} z>0, \\ \cos z\operatorname{ctg} x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x\operatorname{ctg} y>0, \\ \cos y\operatorname{ctg} z>0, \\ \cos z\operatorname{ctg} x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \\ \cos x\operatorname{ctg} y>0, \\ \cos y\operatorname{ctg} z>0, \\ \cos z\operatorname{ctg} x>0. \end{cases}$$

Получаем следующие 8 случаев:

$$1)\ \begin{cases} \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x<0, \\ \operatorname{ctg} y<0, \\ \operatorname{ctg} z<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi l_1,\ l_1\in Z, \\ y=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi l_2,\ l_2\in Z, \\ z=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi l_3,\ l_3\in Z; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{ctg}x > 0, \\ \text{ctg}y < 0, \\ \text{ctg}z < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi l_4,\ l_4 \in Z, \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l_5,\ l_5 \in Z, \\ z = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_6,\ l_6 \in Z; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{ctg}x < 0, \\ \text{ctg}y < 0, \\ \text{ctg}z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l_7,\ l_7 \in Z, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_8,\ l_8 \in Z, \\ z = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi l_9,\ l_9 \in Z; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{ctg}x > 0, \\ \text{ctg}y < 0, \\ \text{ctg}z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi l_{10},\ l_{10} \in Z, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{11},\ l_{11} \in Z, \\ z = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{12},\ l_{12} \in Z; \end{cases}$$

5) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x < 0, \\ \operatorname{ctg} y > 0, \\ \operatorname{ctg} z < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{13},\ l_{13} \in Z, \\ y = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi l_{14},\ l_{14} \in Z, \\ z = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l_{15},\ l_{15} \in Z; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x > 0, \\ \operatorname{ctg} y > 0, \\ \operatorname{ctg} z < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{16},\ l_{16} \in Z, \\ y = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi l_{17},\ l_{17} \in Z, \\ z = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{18},\ l_{18} \in Z; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x < 0, \\ \operatorname{ctg} y > 0, \\ \operatorname{ctg} z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{19},\ l_{19} \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{20},\ l_{20} \in Z, \\ z = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi l_{21},\ l_{21} \in Z; \end{cases}$

$$8)\ \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \mathrm{ctg} x > 0, \\ \mathrm{ctg} y > 0, \\ \mathrm{ctg} z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{22},\ l_{22} \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{23},\ l_{23} \in Z, \\ z = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi l_{24},\ l_{24} \in Z. \end{cases}$$

Объединяя одинаковые решения, получаем $x_1 = (-1)^{k_1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k_1$, $k_1 \in Z$, $y_1 = (-1)^{k_2} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k_2,\ k_2 \in Z$, $z_1 = (-1)^{k_3} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k_3,\ k_3 \in Z$ (где k_1, k_2 и k_3 — числа одной четности);

$$x_2 = y_3 = z_4 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k_1,\quad y_2 = z_3 = x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_2 + 1),$$

$$z_2 = x_3 = y_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_3;\quad x_5 = y_6 = z_7 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k_1 + 1),$$

$$y_5 = z_6 = x_7 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_2,\quad z_5 = x_6 = y_7 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_3 + 1).$$

Ответ: $x_1 = (-1)^{k_1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k_1$, $y_1 = (-1)^{k_2} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k_2$, $z_1 = (-1)^{k_3} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k_3$, k_1, k_2 и k_3 — числа одной четности ($k_1, k_2, k_3 \in Z$);

$$x_2 = y_3 = z_4 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k_1,\quad y_2 = z_3 = x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_2 + 1),$$

$$z_2 = x_3 = y_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_3;\quad x_5 = y_6 = z_7 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k_1 + 1),$$

$$y_5 = z_6 = x_7 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k_2,\quad z_5 = x_6 = y_7 = \frac{\pi}{6} + \pi(2k_3 + 1).$$

8.500. Найти x, y, z, если $\frac{\sin x}{1}=\frac{\sin y}{\sqrt{3}}=\frac{\sin z}{2}$, $x+y+z=\pi$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

Решение.

Запишем следующую систему:

$$\begin{cases}\sqrt{3}\sin x=\sin y,\\ 2\sin x=\sin z, \quad \Rightarrow z=\pi-(x+y),\\ z=\pi-(x+y)\end{cases}$$

$$2\sin x=\sin(\pi-(x+y))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x=\sin(x+y)\Leftrightarrow 2\sin x=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Так как $\sin y=\sqrt{3}\sin x$, то $2\sin x=\sin x\cos y+\cos x\cdot\sqrt{3}\sin x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2-\cos y-\sqrt{3}\cos x\right)=0$, откуда $\sin x=0$, $x=\pi n, n\in Z$. Учитывая, что $x, y, z\geq 0$ и $x+y+z=\pi$, имеем:

1) $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0,\\ z_1=\pi,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=\pi,\\ z_2=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=\pi,\\ y_3=0,\\ z_3=0.\end{cases}$

2) При $x>0, y>0, z>0$ получаем:

$$\begin{cases}\sqrt{3}\sin x=\sin y,\\ 2-\cos y-\sqrt{3}\cos x=0,\\ z=\pi-(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin y=\sqrt{3}\sin x,\\ \cos y=2-\sqrt{3}\cos x,\\ z=\pi-(x+y),\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 y=3\sin^2 x,\\ \cos^2 y=4-4\sqrt{3}\cos x+3\cos^2 x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-\cos^2 y=3\left(1-\cos^2 x\right),\\ \cos^2 y=4-4\sqrt{3}\cos x+3\cos^2 x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 y=3\cos^2 x-2,\ 3\cos^2 x-2=4-4\sqrt{3}\cdot\cos x+3\cos^2 x,$$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{\pi}{6}$. Отсюда $\cos^2 y = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 = \dfrac{1}{4}$, и так как $y > 0, \cos y = \dfrac{1}{2}$, $y_4 = \dfrac{\pi}{3}$.

Окончательно $z_4 = \pi - \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $y_1 = \dfrac{\pi}{3}, z_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = y_3 = z_4 = 0$; $y_2 = z_3 = x_4 = 0$; $z_2 = x_3 = y_4 = \pi$.

Решения к главе 9

НЕРАВЕНСТВА

НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Неравенства $f_1(x) > f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные функции переменной x (одна из них может быть постоянной), называются *неравенствами с одним неизвестным*.

Переменная величина x называется неизвестной. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — алгебраические выражения, то неравенство называется алгебраическим.

Решением неравенства с одним неизвестным называется такое значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в тождественное (истинное).

Решить неравенство с одним неизвестным — значит найти множество (совокупность) всех его решений или показать, что оно не имеет решений.

Областью допустимых значений неизвестного данного неравенства (ОДЗ) или областью определения неравенства называют множество всех значений неизвестного, при которых существуют обе части неравенства.

Равносильные неравенства и основные теоремы о равносильности неравенств

Так как рассматриваемые ниже понятия и свойства неравенств одинаковы для неравенств $f_1(x) > f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, то будем рассматривать только неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Пусть даны два неравенства с одним неизвестным

$$f_1(x) > f_2(x), \tag{9.1}$$

$$g_1(x) > g_2(x).$$

Неравенство (9.2) называется следствием неравенства (9.1), если все решения неравенства (9.1) есть решения неравенства (9.2) или неравенство (9.1) не имеет решений.

Два неравенства (с одним неизвестным) называются равносильными (эквивалентными), если каждое из них является следствием другого.

Если над обеими частями неравенства с одним неизвестным произвести тождественные преоброзования, не меняющие области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения D и в результате тождественных преоброзований получилось неравенство $f_3(x) > f_4(x)$ с той же областью определения, то они равносильны.

Если к каждой части данного неравенства прибавить одно и то же число или выражение, имеющее смысл при всех значениях неизвестного из области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения D и $m(x)$ — число или выражение, имеющее смысл при всех значениях x из D, то неравенство $f_1(x) + m(x) > f_2(x) + m(x)$ равносильно данному.

Члены неравенства можно переносить с противоположным знаком из одной части неравенства в другую.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или выражение, принимающее положительные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то полученное неравенство того же смысла будет равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или выражение, принимающее отрицательные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то получим равносильное данному неравенство противоположного смысла, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ и число или выражение $m(x) < 0$ при всех x из ОДЗ неравенства, то неравенство $f_1(x) \cdot m(x) < f_2(x) \cdot m(x)$ будет равносильно данному.

Неравенство $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

Неравенство $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Решение неравенства первой степени с одним неизвестным

Неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x),\ f_1(x) \ge f_2(x),$$
$$f_1(x) < f_2(x),\ f_1(x) \le f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейные функции переменной x (одна из которых может быть постоянной), называются неравенствами первой степени с одним неизвестным.

Всякое линейное неравенство с одним неизвестным всегда можно привести к каноническому виду

$$ax + b > 0. \tag{9.3}$$

Решение неравенства $ax + b > 0$

Если $a > 0$, то после умножения обеих частей неравенства на $\frac{1}{a} > 0$ получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} > 0$, из которого последует $x > -\frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, то после умножения обеих частей данного неравенства на $\frac{1}{a} < 0$ получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} < 0$, из которого следует $x < -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то при $b \le 0$ для любого действительного значения x неравенство обращается в неверное, т.е. решений не имеет, а при $b > 0$ данное неравенство верно при всех действительных значениях x, т.е. все действительные числа являются решениями неравенства.

Решение неравенств второй степени (квадратных) с одним неизвестным

Неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного не выше второй степени, причем хотя бы один из них второй степени, называется неравенством второй степени с одним неизвестным.

Всякое неравенство второй степени с одним неизвестным (квадратное неравенство) можно привести к одному из его канонических видов:

$$\begin{aligned} &ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c\ge 0,\\ &ax^2+bx+c<0, \quad ax^2+bx+c\le 0, \end{aligned} \tag{9.4}$$

где $x \ne 0$.

Решение неравенства $ax^2+bx+c>0$ $(a\ne 0)$

Если $a>0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$$

или

$$x^2+px+q>0, \tag{9.5}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Если $a<0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$$

или

$$x^2+px+q<0, \tag{9.6}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Другие неравенства вида (9.4) также приводятся к виду, аналогичному (9.5) или (9.6).

Исследование трехчлена $x^2+px+q=0$

Рассмотрим трехчлен

$$x^2+px+q. \tag{9.7}$$

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно разложить на множители с действительными коэффициентами

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ и $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ — корни трехчлена $(x_1 < x_2)$.

Если $x < x_1 < x_2$, то $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Если $x_1 < x < x_2$, то $x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q < 0$.

Если $x > x_2 > x_1$, то $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Вывод. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при значениях x, меньших меньшего корня и больших большего корня, и отрицателен при значениях x, лежащих между корнями.

2. Если $D = p^2 - 4q = 0$ $\left(q = \frac{p^2}{4}\right)$, то трехчлен $x^2 + px + q$ принимает вид

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

и при всех $x \neq -\frac{p}{2}$ будет положительным, а при $x = -\frac{p}{2}$ равен нулю.

3. Если $D = p^2 - 4q < 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно представить в виде

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$ при всех x, а $4q - p^2 > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при всех значениях x.

Решение целых рациональных неравенств с одним неизвестным

Целым рациональным алгебраическим неравенством с одним неизвестным называется такое неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного.

Степенью целого рационального алгебраического неравенства с одним неизвестным называется большая из степеней многочленов, входящих в это неравенство.

Всякое целое рациональное алгебраическое неравенство n-й степени с одним неизвестным может быть приведено к одному из канонических видов

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n > 0, \tag{9.8}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \geq 0 \tag{9.9}$$

или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n < 0, \tag{9.10}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \leq 0 \tag{9.11}$$

$$(a_0 \neq 0).$$

Метод интервалов

Чтобы найти решения неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0 \tag{9.12}$$

или

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0, \tag{9.13}$$

достаточно нанести на числовую ось нули (корни) левой части неравенства $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а затем проверить знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов путем подстановки любого числа из этого интервала. Тогда множеством всех решений неравенства (9.12)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак плюс, а решением неравенства (9.13)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак минус.

При решении неравенств

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\geq 0$$

и

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\leq 0$$

с помощью метода интервалов, кроме соответствующих интервалов знакопостоянства левых частей неравенств, к их решениям надо относить и их нули (корни).

Обобщенный метод интервалов

Рассмотрим схему решения неравенства (9.8)

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n>0 \quad (a\neq 0).$$

Многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ в множестве действительных чисел можно представить в виде

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — действительные корни соответственно кратности $m_1, m_2, \ldots, m_k$, а трехчлены $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_ix+q_i$ имеют отрицательные дискриминанты, т.е. при всех x положительны.

Неравенство (9.8) можно переписать в виде

$$a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i}>0.$$

Так как квадратные трехчлены в этом неравенстве принимают положительные значения при всех действительных значениях неизвестного, то оно равносильно неравенству

$$a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}>0.$$

Множители левой части неравенства с нечетными показателями можно оставить в первой степени, а с четными – опустить, выписав те значения x, при которых они обращаются в нуль. Тогда неравенство примет вид

$$a_0\left(x-x_{j_1}\right)\left(x-x_{j_2}\right)\ldots\left(x-x_{j_s}\right)>0,$$

при $a_0>0$ оно равносильно неравенству

$$\left(x-x_{j_1}\right)\left(x-x_{j_2}\right)\ldots\left(x-x_{j_s}\right)>0,$$

а при $a_0 < 0$ — неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2})\ldots(x - x_{j_s}) < 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

Дробно-рациональные неравенства

Неравенства вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0; \qquad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \tag{9.14}$$

или

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0; \qquad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0, \tag{9.15}$$

где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ и $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-2}x^2 + b_{m-1}x + b_m \quad (b_0 \neq 0)$ — многочлены переменной x, называются дробно-рациональными неравенствами.

При решении таких неравенств пользуются следующими утверждениями:

1. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ равносильно неравенству

$$P_n(x)Q_m(x) > 0.$$

2. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \geq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

3. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ равносильно неравенству

$$P_n(x)Q_m(x) < 0.$$

4. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \leq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств сводится к решению целых рациональных неравенств.

При решении дробно-рациональных неравенств нужно придерживаться следующей схемы:

а) перенести все члены неравенства в левую часть;

б) привести все члены левой части неравенства к общему знаменателю;

в) заменить дробные неравенства целыми;

г) разложить левую часть полученного неравенства на простейшие множители;

д) привести полученное неравенство к виду (9.12) или (9.13);

е) найти решения полученного неравенства по методу интервалов.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Системой неравенств с одним неизвестным называется несколько неравенств, в которых под одной и той же буквой, обозначающей неизвестное, подразумевается одна и та же величина.

При решении системы неравенств с одним неизвестным обычно решают каждое из неравенств системы, а затем находят пересечение множеств полученных решений.

Решить систему неравенств с одним неизвестным – значит найти множество всех ее решений или показать, что система не имеет решений.

НЕРАВЕНСТВА С НЕИЗВЕСТНЫМ ПОД ЗНАКОМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком абсолютной величины (модуля), используется определение абсолютной величины:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geq 0, \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Кроме того, иногда бывает полезным применить геометрический смысл модуля числа, согласно которому $|x|$ есть расстояние от точки x числовой прямой до начала отсчета, а $|x-a|$ — это расстояние на числовой прямой между точками x и a.

Рассмотрим неравенство

$$f(|x|) < g(x), \tag{9.16}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции.

Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) < g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} x \ge 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| < g(x), \tag{9.17}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} g(x) \le 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| > g(x), \tag{9.18}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ x \in \text{ОДЗ неравенства } (9.18). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| < g(x), \tag{9.19}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| < g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} x \ge 0, \\ |f(x)| < g(x). \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно двойному неравенству

$$-g(x) < f(|x|) < g(x).$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| > g(x), \tag{9.20}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| > g(x) \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ |f(x)| > g(x). \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x). \end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| \geq |g(x)|, \tag{9.21}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство решается при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком постоянства знака как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака абсолютной величины. Объединив решения на всех промежутках, получим множество всех решений неравенства.

Некоторые неравенства вида (9.21) $|f(x)| \geq |g(x)|$ целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$, т.е. возведением обеих частей исходного неравенства в квадрат.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Алгебраическое неравенство называется иррациональным, если его неизвестное входит под знак корня.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются только арифметические, а корни нечетной степени рассматриваются на всей числовой оси (при всех действительных значениях подкоренных выражений).

Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех значениях неизвестного из области допустимых, возвести в любую натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

причем при всех x из ОДЗ $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, то неравенство

$$(f_1(x))^n > (f_2(x))^n$$

равносильно данному.

Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

то неравенство $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ равносильно данному.

В частности, неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, \quad n \in N, \tag{9.22}$$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x), \end{cases}$ а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, \quad n \in N, \tag{9.23}$$

равносильно неравенству $f(x) < g(x)$; неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \tag{9.24}$$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}, \end{cases}$ а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \tag{9.25}$$

равносильно неравенству $f(x) < (g(x))^{2n+1}$; неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \tag{9.26}$$

равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases}$$

а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \tag{9.27}$$

равносильно неравенству $f(x) > (g(x))^{2n+1}$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении показательных неравенств используются следующие правила:

1) Если $a > 1$, то неравенство

$$a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \tag{9.28}$$

равносильно неравенству $f_1(x) < f_2(x)$, а неравенство

$$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \tag{9.29}$$

равносильно неравенству $f_1(x) > f_2(x)$.

2) Если $0 < a < 1$, то неравенство

$$a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \tag{9.30}$$

равносильно неравенству $f_1(x) > f_2(x)$, а неравенство

$$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \tag{9.31}$$

равносильно неравенству $f_1(x) < f_2(x)$.

3) Если $a > 1$, то неравенство

$$\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x), \tag{9.32}$$

где $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, равносильно неравенству $f_1(x) < f_2(x)$, а неравенство

$$\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x), \tag{9.33}$$

где $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, равносильно неравенству $f_1(x) > f_2(x)$.

4) Если $0 < a < 1$, то неравенство

$$\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x), \tag{9.34}$$

где $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, равносильно неравенству $f_1(x) > f_2(x)$, а неравенство

$$\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x), \tag{9.35}$$

где $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, равносильно неравенству $f_1(x) < f_2(x)$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Тригонометрическим неравенством называется неравенство, в котором неизвестное входит под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся:

1. Неравенство $\sin x > a$. Если $a < -1$, то решением неравенства будет любое действительное число. Если $-1 \le a < 1$, то решениями неравенства будут

$$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.36}$$

Если $a \ge 1$, то неравенство решений не имеет.

2. Неравенство $\sin x < a$. Если $a \le -1$, то неравенство решений не имеет. Если $-1 < a \le 1$, то решениями неравенства будут

$$\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.37}$$

Если $a > 1$, то неравенство верно при всех действительных значениях x.

3. Неравенство $\cos x > a$. Если $a < -1$, то неравенство верно при всех действительных значениях x. Если $-1 \le a < 1$, то решениями неравенства будут

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.38}$$

Если $a \ge 1$, то неравенство решений не имеет.

4. Неравенство $\cos x < a$. Если $a \le -1$, то неравенство решений не имеет. Если $-1 < a \le 1$, то решениями неравенства будут

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.39}$$

Если $a > 1$, то неравенство верно при всех значениях x.

5. Неравенство $\operatorname{tg} x > a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \tag{9.40}$$

6. Неравенство $\operatorname{tg} x < a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z. \tag{9.41}$$

7. Неравенство $\operatorname{ctg} x > a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (9.42)$$

8. Неравенство $\operatorname{ctg} x < a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in Z. \qquad (9.43)$$

В случае нестрогих неравенств к решениям присоединяются соответствующие концы интервалов.

Решить неравенства (9.216 — 9.220):

9.216. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{\log_5 x(2 - \log_3 x)}{\log_3 x}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

Перейдем к основанию 5. Имеем

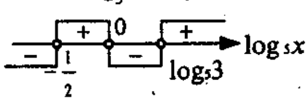
$$\log_5 x + \frac{\log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} < \frac{\log_5 x\left(2 - \dfrac{\log_5 x}{\log_5 3}\right)}{\dfrac{\log_5 x}{\log_5 3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_5^2 x + (1 - 2\log_5 3)\log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\log_5 x - \log_5 3)\left(\log_5 x + \dfrac{1}{2}\right)}{\log_5 x} < 0 \Leftrightarrow (\log_5 x - \log_5 3) \times$$

$$\times \left(\log_5 x + \frac{1}{2}\right)\log_5 x < 0.$$

Методом интервалов для $\log_5 x$ получим



$$1) \log_5 x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < 5^{-\frac{1}{2}};$$

$$2) 0 < \log_5 x < \log_5 3 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup (1;3)$.

9.217. $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2.$

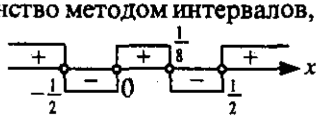
Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x - 2 - 8\sin^2 x + 2}{4\sin^2 x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-8\sin^2 x + \sin x}{4\sin^2 x - 1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\sin^2 x - \sin x}{\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - \frac{1}{8}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим



$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < \sin x < 0, \\ \frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{1}{8} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi - \arcsin\frac{1}{8} + 2\pi n, \\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < 2\pi n, \\ -\pi + 2\pi n < x < -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(2\pi n + \arcsin\frac{1}{8}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n + \frac{5\pi}{6}; 2\pi n + \pi - \arcsin\frac{1}{8}\right) \cup$

$\cup \left(2\pi n - \frac{\pi}{6}; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n - \pi; 2\pi n - \frac{5\pi}{6}\right), n \in Z.$

9.218. $\sqrt{5x - 4} + \sqrt{3x + 1} < 3.$

Решение.

Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x - 4 \ge 0, \\ 3x + 1 \ge 0, \\ 5x - 4 + 2\sqrt{(5x - 4)(3x + 1)} + 3x + 1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{4}{5}, \\ \sqrt{15x^2 - 7x - 4} < 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{5}, \\ x^2 - 41x + 40 > 0, \\ 3 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x > 40, \\ x < 1, \end{array}\right. \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \le x < 1.$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{4}{5};1\right)$

9.219. $\dfrac{3^{2|x-1|}+3}{4} < 3^{|x-1|}$.

Решение.

Из условия имеем $3^{2|x-1|} - 4 \cdot 3^{|x-1|} + 3 < 0$ и решим неравенство как квадратное относительно $3^{|x-1|}$.

Получим $1 < 3^{|x-1|} < 3 \Leftrightarrow 0 < |x-1| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-1 < 1, \\ x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \ne 1. \end{cases}$

Ответ: $x \in (0:1) \cup (1;2)$.

9.220. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

Решение.

ОДЗ: $x^2 + 3x + 2 \ge 0, \begin{cases} x \ge -1, \\ x \le -2. \end{cases}$

Перепишем данное неравенство в виде $\sqrt{x^2+3x+2} < 1 + \sqrt{x^2-x+1}$ и возведем обе его части в квадрат. Тогда

$$x^2 + 3x + 2 < 1 + 2\sqrt{x^2-x+1} + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} > 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - x + 1 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - x + 1 > 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ 3x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0; \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} < x < \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получим $\left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ -1 \le x < \dfrac{\sqrt{13}-1}{6}. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty;-2] \cup \left[-1;\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$.

9.221. Доказать, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой всех ребер наибольший объем имеет куб. (Для доказательства можно использовать, например, неравенство $\dfrac{a+b+c+d}{2} \ge \sqrt[4]{abcd}$, верное для всех положительных чисел).

Решение.

Имеет место следующее неравенство. Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Пусть a_1, a_2, a_3 — ребра прямоугольного параллелепипеда, $V = a_1a_2a_3$ и $a_1 + a_2 + a_3 = b$.

Тогда $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \ge \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \Leftrightarrow \dfrac{b}{3} \ge \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{3}\right)^3 \ge a_1a_2a_3 = V$.

При $a_1 = a_2 = a_3 \dfrac{b}{3} = \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \Leftrightarrow a_1a_2a_3 = \left(\dfrac{b}{3}\right)^3, V = a_1a_2a_3 = \left(\dfrac{b}{3}\right)^3$, если хотя бы два ребра не равны, то $V < \left(\dfrac{b}{3}\right)^3$.

Что и требовалось доказать.

9.222. При каких значениях p система неравенств $-9 < \dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} < 6$ выполняется для всех действительных значений x?

Решение.

Неравенство перепишем в виде системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} < 6, \\ \dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} - 6 < 0, \\ \dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2-(p+6)x+12}{x^2-x+1} > 0, \\ \dfrac{12x^2+(p-9)x+3}{x^2-x+1} > 0. \end{cases}$$

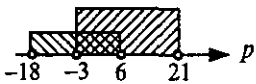
$$\begin{cases} 3x^2-(p+6)x+12>0, \\ 12x^2+(p-9)x+3>0. \end{cases}$$

$ax^2+bx+c>0$, для любых $x\in R$ при $D=b^2-4ac<0$, $a>0$. Отсюда

$$\begin{cases} (p+6)^2-144<0, \\ (p-9)^2-144<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p+6)^2<144, \\ (p-9)^2<144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12<p+6<12, \\ -12<p-9<12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -18<p<6, \\ -3<p<21. \end{cases}$$

Методом интервалов имеем $p\in(-3;6)$.



Ответ: $p\in(-3;6)$.

9.223. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} (x-1)\cdot\lg 2+\lg\left(2^{x+1}+1\right)<\lg\left(7\cdot 2^x+12\right), \\ \log_x(x+2)>2. \end{cases}$$

Решение.

Из первого неравенства системы имеем

$\lg 2^{x-1}+\lg\left(2^{x+1}+1\right)<\lg\left(7\cdot 2^x+12\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg 2^{x-1}\left(2^{x+1}+1\right)<\lg\left(7\cdot 2^x+12\right)$, $2^{x-1}\left(2^{x+1}+1\right)<7\cdot 2^x+12$,

$2^{2x}+\dfrac{2^x}{2}-7\cdot 2^x-12<0$, $2\cdot 2^x-13\cdot 2^x-24<0$.

Решая это неравенство как квадратное относительно 2^x, получим

$-\dfrac{3}{2}<2^x<8$, $2^x<2^3$, $x<3$. Из второго неравенства системы имеем

а) $\begin{cases} 0<x<1, \\ x+2<x^2, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ x>-2; \end{cases}$ $\varnothing$;

б) $\begin{cases} x>1, \\ x+2>x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ -1<x<2, \end{cases} 1<x<2.$ $\begin{cases} x<3, \\ 1<x<2, \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$

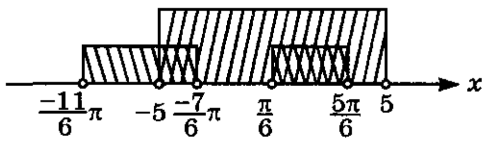
Ответ: $x\in(1;2)$.

9.224. Найти область определения функции
$y=\sqrt{\sin x-0{,}5}+\log_3(25-x^2)$.

Решение.
Имеем систему неравенств

$$\begin{cases}\sin x-0{,}5\ge 0,\\ 25-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ge 0{,}5,\\ x^2<25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\le x\le\dfrac{5}{6}\pi+2\pi n, n\in Z,\\ -5<x<5.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим $x\in\left(-2;-\frac{7}{6}\pi\right)\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{5}{6}\pi\right]$.



Ответ: $x\in\left(-2;-\frac{7}{6}\pi\right)\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{5}{6}\pi\right]$.

9.225. Доказать, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $d>0$ справедливо неравенство $\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$.

Решение.

Так как $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ при $a>0$ и $b>0$, то

$$\frac{a+b+c+d}{4}\ge\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4},\ \frac{a+b+c+d}{4}\ge\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}.$$

Далее

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\ge\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}},\ \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\ge\sqrt[4]{abcd}\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}.$$

9.226. При каких значениях m неравенство $-6<\frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}<4$ выполняется для всех действительных значений x?

Решение.
Неравенство равносильно системе двух неравенств

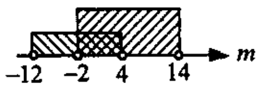
$$\begin{cases}\dfrac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}+6>0,\\ \dfrac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}-4<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{8x^2+(m-6)x+2}{x^2-x+1}>0,\\ \dfrac{2x^2-(m+4)x+8}{x^2-x+1}<0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2+(m-6)x+2>0, \\ 2x^2-(m+4)x+8>0. \end{cases}$$

$ax^2+bx+x>0$ для всех $x \in R$ при $D=b^2-4ac<0$, $a>0$. Отсюда

$$\begin{cases} (m-6)^2-64<0, \\ (m+4)^2-64<0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-6)^2<64, \\ (m+4)^2<64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8<m-6<8, \\ -8<m+4<8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<14, \\ -12<m<4. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $m \in (-2; 4)$.



Ответ: $m \in (-2; 4)$.

Доказать справедливость неравенств (9.227 — 9.230):

9.227. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right) \geq 8 \, (x>0, y>0, z>0)$.

Решение.

Из условия имеем

$$1+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+1+\frac{y}{z}+\frac{x}{y} \geq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{z}{y}}-\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2+2 \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{y}}-\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство верно.

9.228. $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 (a>0, b>0)$.

Решение.

Имеем

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a^3+4b^3-\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)}{8} \geq 0,$$

$$3a^3+3b^3-3ab(a+b) \geq 0, (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b) \geq 0,$$

$$(a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right) \geq 0, (a+b)(a-b)^2 \geq 0.$$

Так как $a>0$ и $b>0$, то неравенство справедливо.

9.229. $\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

Решение.

$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то, возведя его в квадрат, получим $\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$. С другой стороны $\frac{a^4+b^4}{2} - \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(2a^4+2b^4-a^4-b^4-2a^2b^2\right) = \frac{1}{4}\left(a^2-b^2\right)^2 \geq 0$.

Таким образом, $\frac{a^4+b^4}{2} \geq \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$ и исходное неравенство доказано.

9.230. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$.

Решение.

Учитывая, что $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ запишем $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}} - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+1}{\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}-1\right)^2}{\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}} > 0$.

Последнее неравенство справедливо.

9.231. Без помощи таблиц показать, что $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде системы $\begin{cases} \log_3 2+\log_2 3 > 2, \\ \log_3 2+\log_2 3 < 3. \end{cases}$

Преобразуем первое неравенство системы

$\frac{1}{\log_2 3} + \log_2 3 - 2 > 0, \frac{\log_2^2 3 - 2\log_2^3 + 1}{\log_2 3} > 0, \frac{\left(\log_2^3 - 1\right)^2}{\log_2 3} > 0$.

Так как $\log_2 3 > 0,$ то это неравенство справедливо.

Во втором неравенстве $0 < \log_3 2 < 1,\ 1 < \log_2 3 < 2 \Rightarrow \log_3 2 + \log_2 3 < 3.$

9.232. Пусть число $x_1 > 0$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0.$ Показать, что существует корень x_2 уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ такой, что $x_1 + x_2 \ge 2.$

Решение.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ поменять местами a и c, то получим уравнение, корни которого обратны корням данного (см. 6.121).

Для корня $x_1 > 0$ возьмем $x_2 = \dfrac{1}{x_1}.$ Докажем, что $x_1 + \dfrac{1}{x_1} \ge 2 \Leftrightarrow$

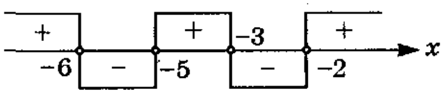
$\Leftrightarrow \dfrac{x_1^2 - 2x_1 + 1}{x_1} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \ge 0.$ Последнее неравенство очевидно.

9.233. Доказать, что если $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 11x + 30) < 0,$ то $\sin 2x > 0.$

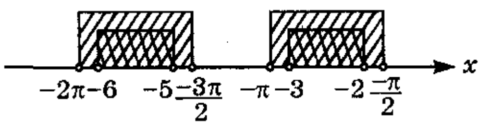
Решение.

Перепишем первое неравенство в виде

$$(x+3)(x+2)(x+6)(x+5) < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -6 < x < -5, \\ -3 < x < -2. \end{array}\right.$$



$\sin 2x > 0$ при $2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n,\ \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$



Далее, $-2\pi < -6 < x < -5 < -\dfrac{3\pi}{2},\ -\pi < -3 < x < -2 < -\dfrac{\pi}{2}.$

Получили, что $\sin 2x > 0.$

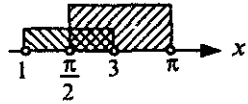
9.234. *Из значений x, удовлетворяющих неравенству* $\log_{1,3}(2x-2) < \log_{1,3}(x+1),$ *указать те, для которых* $\sin 2x < 0.$

Решение.

Из первого неравенства получаем:

$$\begin{cases} 2x - 2 < x + 1, \\ 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 1, \end{cases} \quad 1 < x < 3.$$

$\sin 2x < 0 \Leftrightarrow -\pi + 2\pi n < 2x < 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ 3\right).$



Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{2};3\right)$

9.235. Числа x_1 и x_2 являются действительными корнями уравнений $5x^3-6=0$ и $6x^3-5=0$ соответственно. Показать, что $x_1+x_2>2$.

Решение.

Имеем $5x^3=6, x^3=\frac{6}{5}, x_1=\sqrt[3]{\frac{6}{5}}$. Из второго уравнения получаем $6x^3=5, x^3=\frac{5}{6}, x_2=\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$.

Тогда $\sqrt[3]{\frac{6}{5}}+\sqrt[3]{\frac{5}{6}}>2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{6}{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{6}{5}}}-2>0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{6}{5}}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}+1}{\sqrt[3]{\frac{6}{5}}}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{6}{5}}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{6}{5}}}>0.$

Так как $\left(\sqrt[3]{\frac{6}{5}}-1\right)^2>0$ и $\sqrt[3]{\frac{6}{5}}>0$, то неравенство верно.

Решить неравенства (**9.236 — 9.290**):

9.236. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0.$

Решение.

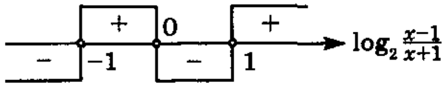
ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ x+1>0, \end{cases} x>1.$

Из условия имеем:

$\log_2\frac{x-1}{x+1}+\frac{\log_2 2}{\log_2\frac{x+1}{x-1}}>0, \log_2\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{\log_2\frac{x-1}{x+1}}>0, \frac{\log_2^2\frac{x-1}{x+1}-1}{\log_2\frac{x-1}{x+1}}>0,$

$\left(\log_2\frac{x-1}{x+1}-1\right)\left(\log_2\frac{x-1}{x+1}+1\right)\log_2\frac{x-1}{x+1}>0.$

Методом интервалов получаем:



$$\left[\begin{array}{l}-1<\log_2\dfrac{x-1}{x+1}<0,\\ \log_2\dfrac{x-1}{x+1}>1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<\dfrac{x-1}{x+1}<1,\\ \dfrac{x-1}{x+1}>2,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+1}<1,\\ \dfrac{x-1}{x+1}>\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x-1}{x+1}>2,\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1,\\ (x-3)(x+1)>0,\end{cases}\\ (x+3)(x+1)<0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<-1,\end{array}\right.\end{cases}\\ -3<x<-1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\ -3<x<-1.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $x>3$.

Ответ: $x\in(3;\infty)$.

9.237. $\log_x\log_2(4^x-12)\le 1$.

Решение.

Из условия имеем

1) $\begin{cases}0<x<1,\\ \log_2(4^x-12)\ge x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ 4^x-12\ge 2^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ 2^{2x}-2^x-12\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ 2^x\ge 4,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ x\ge 2,\end{cases}\varnothing;$

2) $\begin{cases}x>1,\\ \log_2(4^x-12)\le x,\\ \log_2(4^x-12)>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ 4^x-12\le 2^x,\\ 4^x-12>1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ 2^{2x}-2^x-12\le 0,\\ 4^x>13,\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ 2^x\le 4,\\ x>\log_4 13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x\le 2,\\ x>\log_4 13\end{cases}\Leftrightarrow\log_4 13<x\le 2.$

Ответ: $x\in(\log_4 13;\ 2]$.

9.238. $10\cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\operatorname{tg}x)}}>3$.

Решение.

Имеем $0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\operatorname{tg}x)}} > 0{,}3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\operatorname{tg}x)} < 1, 0 \le \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\operatorname{tg}x) < 1,$

$\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg}x \le 1, \frac{\pi}{6} + \pi n < x \le \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in Z.$

9.239. $2 < 2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2} < 8.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x \ne 1.$

Из условия имеем:

$$2 < 2^{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}} < 2^3 \Leftrightarrow 1 < \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < \operatorname{ctg}\frac{x}{2} < \sqrt{3}, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\frac{x}{2} > 1, \\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2} < -1, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + \pi n, \\ \left[\begin{array}{l} \pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{3\pi}{4} + \pi n < \frac{x}{2} < \pi + \pi n \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \\ \left[\begin{array}{l} 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \end{array}\right. \end{cases} n \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n; \frac{5}{3}\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$

9.240. $3^{\frac{2\cos^2 x - 6}{2\cos^2 x - 1}} > 3^{\frac{\cos x}{1 - 2\cos^2 x}}.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x \ne \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Из исходного неравенства имеем:

$$\frac{2\cos^2 x - 6}{2\cos^2 x - 1} > \frac{\cos x}{1 - 2\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x - 6}{2\cos^2 x - 1} + \frac{\cos x}{2\cos^2 x - 1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2+\cos x-6}{2\cos^2 x-1}>0 \Leftrightarrow (2\cos^2 x+\cos x-6)(2\cos^2 x-1)>0,$$

$$4(\cos x+2)\left(\cos x-\frac{3}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\frac{3}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(2\pi n-\frac{3\pi}{4}; 2\pi n-\frac{\pi}{4}\right), n \in Z.$

9.241. $0{,}2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2 x}}<4\cdot 125^{-\frac{1}{2}}.$

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x-1}-\frac{1}{5^{2\cos^2 x}}<\frac{4}{5^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \frac{5}{5^{2\cos^2 x}}-\frac{1}{5^{2\cos^2 x}}<\frac{4}{5^{\frac{3}{2}}}, \frac{4}{5^{2\cos^2 x}}<\frac{4}{5^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{5^{2\cos^2 x}}<\frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 2\cos^2 x>\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1+\cos 2x>\frac{3}{2},$$

$$\cos 2x>\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right), n \in Z.$

9.242. $\log_x \log_3(9^x-6)\geq 1.$

Решение.

Неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ \log_3(9^x-6)\leq x,\\ \log_3(9^x-6)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ \log_3(9x-6)\geq x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ 9^x-6\leq 3^x,\\ 9^x-6>1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ 9^x-6\geq 3^x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ 3^{2x}-3^x-6\leq 0,\\ 9^x>7;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ 3^{2x}-3^x-6\geq 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ -2\le 3^x\le 3,\\ 9^x>7;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ \left[\begin{array}{l}3^x\ge 3,\\ 3^x\le -2,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ x\le 1,\\ x>\log_9 7;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ x\ge 1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_9 7<x<1,\\ x>1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(\log_9 7;1)\cup(1;\infty)$.

9.243. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-4)}<1 (x\in Z)$.

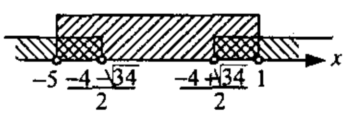
Решение.

Из условия имеем:

$$0\le\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-4)<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x^2+4x-4\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-5\le 0,\\ 2x^2+8x-9>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5\le x\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{-4+\sqrt{34}}{2},\\ x<\dfrac{-4-\sqrt{34}}{2}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Методом интервалов получаем $\left[\begin{array}{l}\dfrac{-4+\sqrt{34}}{2}<x\le 1,\\ -5\le x<\dfrac{-4-\sqrt{34}}{2}.\end{array}\right.$



Так как $x\in Z$, то $x_1=-5$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=-5$, $x_2=1$.

9.244. $\sqrt{1-9\cdot\left(\log_{\frac{1}{8}}x\right)^2}>1-4\cdot\log_{\frac{1}{8}}x$.

Решение.

Пусть $\log_{\frac{1}{8}} x = y$, тогда относительно y неравенство принимает вид

$$\sqrt{1-9y^2} > 1-4y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-4y<0, \\ 1-9y^2 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-4y \ge 0, \\ 1-9y^2 > (1-4y)^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{3} \le y \le \frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} y \le \frac{1}{4}, \\ 25y^2 - 8y < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} < y \le \frac{1}{3}, \\ \begin{cases} y \le \frac{1}{4}, \\ y(25y-8) < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} < y \le \frac{1}{3}, \\ 0 < y \le \frac{1}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < y \le \frac{1}{3}.$$

Отсюда $0 < \log_{\frac{1}{8}} x \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 1$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$

9.245. $\log_{\frac{1}{2}} x + \sqrt{1-4\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2} < 1$.

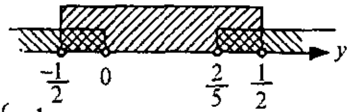
Решение.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{1-4\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2} < 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$ и обозначим $\log_{\frac{1}{2}} x = y$. Тогда неравенство принимает вид:

$$\sqrt{1-4y^2} < 1-y \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4y^2 \ge 0, \\ 1-y > 0, \\ 1-4y^2 < (1-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}, \\ y < 1, \\ 5y^2 - 2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}, \\ y(5y-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} y > \frac{2}{5}, \\ y < 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем:



$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le y < 0, \\ \frac{2}{5} < y \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le \log_{\frac{1}{2}} x < 0, \\ \frac{2}{5} < \log_{\frac{1}{2}} x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \le \sqrt{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < \frac{1}{\sqrt[5]{4}}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$

9.246. $\log_{x^2}(3-2x) > 1$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде:

$$\log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ 3-2x < x^2, \\ 3-2x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 1, \\ 3-2x > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x \ne 0, \\ x^2+2x-3 > 0, \\ x < \frac{3}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1, \end{array}\right. \\ x^2+2x-3 < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -3, \end{array}\right. \\ x < \frac{3}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1, \end{array}\right. \\ -3 < x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing; \\ -3 < x < -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-3; -1)$

9.247. $\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1}3>2{,}5.$

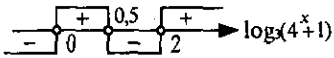
Решение.

Имеем:

$$\log_3(4^x+1)+\frac{1}{\log_3(4^x+1)}-2{,}5>0 \Leftrightarrow \left(\log_3^2(4^x+1)-2{,}5\log_3(4x+1)+1\right)\times$$

$$\times\log_3(4^x+1)>0 \Leftrightarrow \left(\log_3(4^x+1)-2\right)\left(\log_3(4^x+1)-0{,}5\right)\log_3(4^x+1)>0.$$

Методом интервалов относительно $\log_3(4^x+1)$ имеем



$$\left[\begin{array}{l}0<\log_3(4^x+1)<0{,}5,\\ \log_3(4^x+1)>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<4^x+1<\sqrt{3},\\ 4^x+1>9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<4^x<\sqrt{3}-1,\\ 4^x>8\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<\log_4(\sqrt{3}-1),\\ x>\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\log_4(\sqrt{3}-1)\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};\infty\right).$

9.248. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)>-3.$

Решение.

Из условия имеем:

$$-\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(9\cdot3^x-9)>-3,\ \log_3(3^x-1)\cdot\log_3 9(3^x-1)<3,$$

$$\log_3(3^x-1)\cdot\left(\log_3 9+\log_3(3^x-1)\right)<3 \Leftrightarrow \log_3(3^x-1)\cdot\left(2+\log_3(3^x-1)\right)-3<0$$

$$\log_3^2(3^x-1)+2\log_3(3^x-1)-3<0.$$

Решив это неравенство как квадратное относительно $\log_3(3^x-1)$, получим $-3<\log_3(3^x-1)<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{27}<3^x-1<3 \Leftrightarrow \dfrac{28}{27}<3^x<4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{28}{27}<x<\log_3 4.$$

Ответ: $x\in\left(\log_3\dfrac{28}{27};\log_3 4\right)$

9.249. $\log_p \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} < 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq p. \end{cases}$

Исходное неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} < 1, \\ \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \dfrac{\log_p^2 x + \log_p x}{\log_p x - 1} < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \dfrac{\log_p^2 x + \log_p x}{\log_p x - 1} > 0, \\ \dfrac{\log_p^2 x + 1}{\log_p x - 1} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \log_p x \cdot (\log_p x - 1)(\log_p x + 1) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \log_p x \cdot (\log_p x + 1)(\log_p x - 1) > 0, \\ \log_p x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \left[\begin{array}{l} \log_p x < -1, \\ 0 < \log_p x < 1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \left[\begin{array}{l} -1 < \log_p x < 0, \\ \log_p x > 1, \end{array}\right. \\ \log_p x < 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < p < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{p}, \\ p < x < 1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} p > 1, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{p} < x < 1, \\ x > p, \end{array}\right. \\ x < p. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: если $p \in (0;1)$, то $x \in (p;1) \cup \left(\frac{1}{p};\infty\right)$; если $p \in (1;\infty)$, то $x \in \left(\frac{1}{p};1\right)$.

9.250. $\left|x^3-1\right| > 1-x.$

Решение.

Из условия имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x^3-1>1-x, \\ x^3-1<-1(1-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x^3-1)+(x-1)>0, \\ x(x^2-1)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)>0, \\ x(x+1)(x-1)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x^2+x+2)>0, \\ x(x+1)(x-1)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1, \\ 0<x<1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1) \cup (1;\infty)$.

9.251. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \ge 2x.$

Решение.

Из условия имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ \frac{x^2-x-12}{x-3} \ge 2x; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ \frac{x^2-x-12}{x-3} \ge 2x, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ \frac{x^2-7x+12}{x-3} \le 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ \frac{x^2-5x+12}{x-3} \le 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ (x^2-7x+12)(x-3) \le 0, \\ x-3 \ne 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ (x^2-5x+12)(x-3) \le 0, \\ x-3 \ne 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ (x-4)(x-3)^3 \le 0, \\ x-3 \ne 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x-3<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ x \le 4, \\ x \ne 3; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x>3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0 \le x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;3)$.

9.252. $\log_x\left(x^3+1\right)\cdot\log_{x+1}x>2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<x\ne1,\\0<x+1\ne1,\end{cases} 0<x\ne1.$

Перейдем к основанию x, тогда:

$$\frac{\log_x\left(x^3+1\right)}{\log_x(x+1)}>2\Leftrightarrow\log_{x+1}\left(x^3+1\right)>2\Leftrightarrow x^3+1>(x+1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-x+1\right)-(x+1)^2>0\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-2x\right)>0,x(x+1)(x-2)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\x>2.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем

Ответ: $x\in(2;\infty)$.

9.253. $\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x).$

ОДЗ: $\begin{cases}x+1>0,\\2-x>0,\\x>0,\\x\ne1,\end{cases} x\in(0;1)\cup(1;2).$

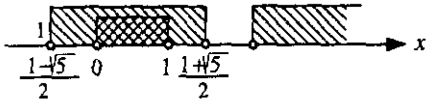
Перейдем к основанию x, тогда:

$$\log_x(x+1)<-\log_x(2-x)\Leftrightarrow\log_x(x+1)<\log_x\frac{1}{2-x}\Leftrightarrow$$

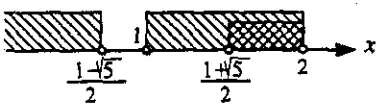
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x+1>\dfrac{1}{2-x};\end{cases}\\\begin{cases}1<x<2,\\x+1<\dfrac{1}{2-x},\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\\dfrac{x^2-x-1}{x-2}>0;\end{cases}\\\begin{cases}1<x<2,\\\dfrac{x^2-x-1}{x-2}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\\left(x^2-x-1\right)(x-2)>0;\end{cases}\\\begin{cases}1<x<2,\\\left(x^2-x-1\right)(x-2)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(x-2) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2, \\ \left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(x-2) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1) Решая первую систему неравенств методом интервалов, получаем $0 < x < 1$.



2) Для второй системы неравенств с помощью числовой прямой имеем $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$.



Ответ: $x \in (0;1) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

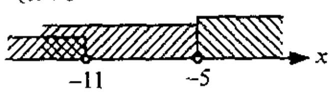
9.254. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0$.

Решение.

Из условия имеем:

$$\log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 1, 0 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < 0{,}2,\ 1 < \frac{x-1}{x+5} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} < 2, \\ \dfrac{x-1}{x+5} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} - 2 < 0, \\ \dfrac{x-1}{x+5} - 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+11}{x+5} > 5, \\ \dfrac{-6}{x+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+11)(x+5) > 0, \\ x+5 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow x < -11.$$



Ответ: $x \in (-\infty; -11)$.

9.255. $\log_x(x^2+3x-3)>1.$

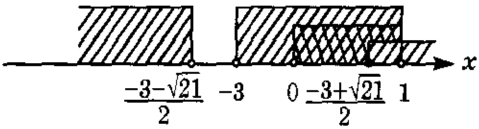
Решение.

Из условия имеем

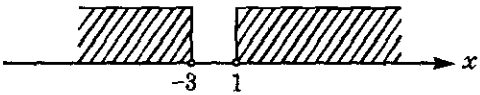
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x^2+3x-3<x,\\x^2+3x-3>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\x^2+3x-3>x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x^2+2x-3<0,\\x^2+3x-3>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\x^2+2x-3>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\(x+3)(x-1)<0,\end{cases}\\ \left(x-\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)>0\end{array}\right\}\\ \begin{cases}x>1,\\(x+3)(x-1)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Решая первую систему методом интервалов, имеем $\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1.$



2) С помощью числовой прямой получаем $x>1$.



Ответ: $x\in\left(\dfrac{\sqrt{21}-3}{2};\,1\right)\cup(1;\,\infty).$

9.256. $|x-1|+|2-x|>3+x.$

Решение.

Исходное неравенство равносильно следующей совокупности трех систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\-(x-1)+(2-x)>3+x;\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\(x-1)+(2-x)>3+x;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\(x-1)-(2-x)>3+x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\x<-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\x>6,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0;\\ \varnothing;\\ x>6.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty)$.

9.257. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$.

Решение.

ОДЗ: $x\in[-2;0)\cup(0;2]$

Из условия имеем:

$$\frac{4-2\cdot\sqrt{4-x^2}+2+\sqrt{4-x^2}}{\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)}>\frac{1}{x},\frac{6-\sqrt{4-x^2}}{x^2}-\frac{1}{x}>0,\frac{6-\sqrt{4-x^2}-x}{x^2}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-\sqrt{4-x^2}-x>0,\sqrt{4-x^2}<6-x\Leftrightarrow\begin{cases}4-x^2\ge 0,\\6-x>0,\\4-x^2<36-12x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2,\\x<6,\\x^2-6x+16>0,\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 2,$$

так как $x^2-6x+16>0, x\in R$.

Ответ: $x\in[-2;0)\cup(0;2]$

9.258. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

Решение.

Так как $\sqrt{x-3}>0$, то имеем

$$\sqrt{x^2-16}+x-3>5,\sqrt{x^2-16}>8-x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-x<0,\\ x^2-16\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}8-x\ge 0,\\ x^2-16>\left(8-x^2\right)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>8,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le -4;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 8,\\ x>5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(5;\infty)$.

9.259. $\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{\left(2-x^3\right)^2}>x-\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow\left|2-x^3\right|>x-\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x^3<0,\\ x^3-2>x-\sqrt[3]{2};\end{cases}\\ \begin{cases}2-x^3\ge 0,\\ 2-x^3>x-\sqrt[3]{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\sqrt[3]{2},\\ \left(x-\sqrt[3]{2}x\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right)-\left(x-\sqrt[3]{2}\right)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\sqrt[3]{2},\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right)+\left(x-\sqrt[3]{2}\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\sqrt[3]{2},\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}-1\right)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\sqrt[3]{2},\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}+1\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Выражения $x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}-1>0$ при $x\in R\left(D=4-3\sqrt[3]{4}<0\right)$ и x^2+ $+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}+1>0$ при $x\in R\left(D=-3\sqrt[3]{4}-4<0\right)$ отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\sqrt[3]{2},\\ x-\sqrt[3]{2}>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\sqrt[3]{2},\\ x-\sqrt[3]{2}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt[3]{2},\\ x<\sqrt[3]{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\infty\right)$

9.260. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x.$

Решение.

Запишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}>1-x \Leftrightarrow \left|x^2-1\right|>1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1<0,\\ -\left(x^2-1\right)>1-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1\geq 0,\\ \left(x^2-1\right)>1-x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2<1,\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2\geq 1,\\ x^2+x-2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<1,\\ 0<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geq 1,\\ x\leq -1,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<-2,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1;\\ x>1,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$.

9.261. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{\left|x^2-2x\right|+4}{|x+2|+x^2}\leq 0.$

Решение.

Имеем

$$\frac{\left|x^2-2x\right|+4}{|x+2|+x^2}\geq 1, \frac{\left|x^2-2x\right|+4}{|x+2|+x^2}-1\geq 0, \frac{\left|x^2-2x\right|+4-|x+2|-x^2}{|x+2|+x^2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2-2x\right|+4-|x+2|-x^2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ x^2-2x+4+x+2-x^2\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\leq x<0,\\ x^2-2x+4-x-2-x^2\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}0\leq x<2,\\ -x^2+2x+4-x-2-x^2\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 2,\\ x^2-2x+4-x-2-x^2\geq 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ x\le 6;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<0,\\ x\le \dfrac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2,\\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\le x\le \dfrac{1+\sqrt{17}}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x\le \dfrac{2}{3},\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2,\\ -2\le x<0;\\ 0\le x\le \dfrac{1+\sqrt{17}}{4};\\ \varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$.

9.262. $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-3|}\le\dfrac{1}{2}$.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде

$$\log_{x^2}\frac{2x}{|x-3|}\le\log_{x^2}|x|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x^2<1,\\ \dfrac{2x}{|x-3|}\ge|x|,\\ x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>1,\\ \dfrac{2x}{|x-3|}\le|x|,\\ \dfrac{2x}{|x-3|}>0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{2x-|x(x-3)|}{|x-3|}\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\ne 3,\\ \dfrac{2x-|x(x-3)|}{|x-3|}\le 0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ x^2-x\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<3,\\ x^2-x\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x(x-5)\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing;\\ \varnothing;\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [5;\infty)$.

9.263. $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x} > 1.$

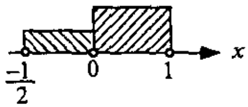
Решение.

Перепишем неравенство в виде

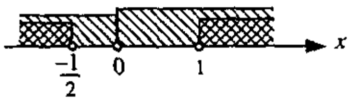
$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x} > \left(4x^2+2x+1\right)^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<4x^2+2x+1<1,\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x+1>1,\\ x^2-x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+2x<0,\\ 4x^2+2x+1>0,\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x>0,\\ x^2-x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(2x+1)<0,\\ x(x-1)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x(2x+1)>0,\\ x(x-1)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Решая первую систему, получаем $\varnothing$.



2) Для второй системы неравенств методом интервалов имеем $\left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{2},\\ x>1.\end{array}\right.$



Ответ: $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (1;\infty)$.

9.264. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)}-1} > 1.$

Решение.

Из условия

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)}-1} > \left(\frac{3}{7}\right)^0 \Leftrightarrow \sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)}-1<0, \sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)}<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)<1, 1 \le \operatorname{ctg} x<\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}+\pi n<x \le \frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right], n \in Z.$

9.265. $1<3^{|x^2-x|}<9.$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$3^0<3^{|x^2-x|}<3^2 \Leftrightarrow 0<|x^2-x|<2 \Leftrightarrow \begin{cases}|x^2-x|<2,\\ |x^2-x|>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<x^2-x<2,\\ x^2-x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-2<0,\\ x^2-x+2>0,\\ x(x-1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<2,\\ x\neq 0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$.

9.266. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}}>25.$

Решение.

Из условия имеем

$$5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}}>5^2 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6}>2, \log_x \frac{8-12x}{x-6}>\log_x x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{8-12x}{x-6}<x^2,\\ \dfrac{8-12x}{x-6}>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ \dfrac{8-12x}{x-6}>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ (x^3-6x^2+12x-8)(x-6)>0,\\ \left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-6)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ (x^3-6x^2+12x-8)(x-6)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ (x-2)^3(x-6)>0,\\ \left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-6)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ (x-2)^3(x-6)<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{3}<x<1,\\ 2<x<6.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(2;6)$.

9.267. $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<2^x+3\cdot 2^{-x}<1,\\ 2\log_2 x-\log_2(x+6)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}2^x+3\cdot 2^{-x}>1,\\ 2\log_2 x-\log_2(x+6)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{2x}-2^x+3<0,\\ 2^{2x}+3>0,\\ \log_2 x^2<\log_2(x+6),\\ x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}2^{2x}-2^x+3>0,\\ \log_2 x^2>\log_2(x+6),\\ x>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система неравенств решений не имеет, так как $2^{2x}-2^x+3>0$, $x\in R$.

Тогда получаем $\begin{cases}x^2>x+6,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-6>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<-2,\end{array}\right.\\ x>0,\end{cases}$ $x>3$.

Ответ: $x\in(3;\infty)$.

9.268. $\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>1$.

Решение.

Из условия имеем

$$\log_{|x-4|}\left(2x^2-9x+4\right)>\log_{|x-4|}|x-4| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<|x-4|<1,\\ 2x^2-9x+4<|x-4|,\\ 2x^2-9x+4>0;\end{cases}\\ \begin{cases}|x-4|>1,\\ 2x^2-9x+4>|x-4|,\\ 2x^2-9x+4>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x-4<1,\\ x-4\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x-4>2x^2-9x+4,\\ x-4<-2x^2+9x-4,\end{array}\right.\\ 2x^2-9x+4>0;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-4>1,\\ x-4<-1,\end{array}\right.\\ x-4<2x^2-9x+4,\\ x-4>-2x^2+9x-4,\\ 2x^2-9x+4>0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$
\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
3<x<5, \\
x \neq 4, \\
\left[\begin{array}{l}
2x^2-10x+8<0, \\
2x^2-8x<0,
\end{array}\right. \\
2x^2-9x+4>0;
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
x>5, \\
x<3,
\end{array}\right. \\
2x^2-10x+8>0, \\
2x^2-8x>0, \\
2x^2-9x+4>0,
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
3<x<5, \\
x \neq 4, \\
\left[\begin{array}{l}
1<x<4, \\
0<x<4,
\end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l}
x>4, \\
x<\frac{1}{2};
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
x>5, \\
x<3,
\end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l}
x>4, \\
x<1,
\end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l}
x>4, \\
x<0,
\end{array}\right. \\
x>4, \\
x<\frac{1}{2},
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}
x<0, \\
x>5.
\end{array}\right.
$$

Ответ: $x \in(-\infty ; 0) \cup(5 ; \infty)$.

9.269. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+3}} \leq \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}$.

Решение.

$$
\text{ОДЗ: }\left\{\begin{array}{l}
x+3>0, \\
x+1>0, \\
\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+3} \neq 0, \\
\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \neq 0,
\end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}
x>-3, \\
x>-1, \\
x \neq-2, \\
x \neq 0,
\end{array}\right.-1<x \neq 0.
$$

Из условия получаем

$$
\frac{1}{\log_2 \sqrt{x+3}}-\frac{1}{\log_2(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+1)-\log_2 \sqrt{x+3}}{\log_2 \sqrt{x+3} \cdot \log_2(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+1)-\log_2 \sqrt{x+3}}{\log_2(x+1)} \geq 0.
$$

1) $x \in (-1; 0)$, $\log_2(x+1) < 0$. Получаем

$$\log_2 \frac{x+1}{\sqrt{x+3}} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x+3}} \le 1 \Leftrightarrow x+1 \le \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2+2x+1 \le x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2 \le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \le 0, x \in (-1;0).$$

2) $x \in (0; +\infty)$, $\log_2(x+1) > 0$.

Имеем $\log_2 \frac{x+1}{\sqrt{x+3}} \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \ge 0, x \in [1;\infty).$

Ответ: $x \in (-1;0) \cup [1;\infty).$

9.270. $\log_x \frac{3}{8-2x} \ge -2.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\log_x \frac{3}{8-2x} \ge \log_x \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ \frac{3}{8-2x} \le \frac{1}{x^2}, \\ \frac{3}{8-2x} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ \frac{3}{8-2x} \ge \frac{1}{x^2}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ (3x^2+2x-8)(x-4) \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 4, \\ x-4<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ (3x^2+2x-8)(x-4) \le 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 4, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ \left(x-\frac{4}{3}\right)(x+2)(x-4) \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 4, \\ x<4; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1. \\ \left(x-\frac{4}{3}\right)(x+2)(x-4) \le 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 4, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ \frac{4}{3} \le x < 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;1)\cup\left[\frac{4}{3};4\right)$.

9.271. $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}}2>0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-3>0, \\ x+3>0, x>3. \\ \dfrac{x+3}{x-3}\neq 1, \end{cases}$

Переходя к основанию 2, имеем

$$-\log_2(x-3)+\log_2(x+3)-\frac{1}{\log_2\frac{x+3}{x-3}}>0\Leftrightarrow\log_2\frac{x+3}{x-3}-\frac{1}{\log_2\frac{x+3}{x-3}}>0,$$

$$\frac{\log_2^2\frac{x+3}{x-3}-1}{\log_2\frac{x+3}{x-3}}>0\Leftrightarrow\left(\log_2^2\frac{x+3}{x-3}-1\right)\cdot\log_2\frac{x+3}{x-3}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}-1\right)\cdot\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}+1\right)\cdot\log_2\frac{x+3}{x-3}>0.$$

Относительно $\log_2\frac{x+3}{x-3}$ методом интервалов получаем

$$\left[\begin{array}{l} -1<\log_2\frac{x+3}{x-3}<0, \\ \log_2\frac{x+3}{x-3}>1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}<\frac{x+3}{x-3}<1, \\ \frac{x+3}{x-3}>2, \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+3}{x-3}>\frac{1}{2}, \\ \frac{x+3}{x-3}<1; \end{cases} \\ \frac{x+3}{x-3}-2>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+3}{x-3}-\frac{1}{2}>0, \\ \frac{x+3}{x-3}-1<0, \end{cases} \\ \frac{x+3}{x-3}-2>0, \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+9}{x-3}>0, \\ \frac{6}{x-3}<0; \end{cases} \\ \frac{x-9}{x-3}<0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+9)(x-3)>0, \\ x-3<0; \end{cases} \\ (x-9)(x-3)<0. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $3 < x < 9$.

Ответ: $x \in (3;9)$.

9.272. $\left|2^{4x^2-1}-5\right| \le 3$.

Решение.

По геометрическому смыслу модуля имеем

$$-3 \le 2^{4x^2-1}-5 \le 3,\ 2 \le 2^{4x^2-1} \le 8,\ 1 \le 4x^2-1 \le 3,\ 2 \le 4x^2 \le 4,$$

$$\frac{1}{2} \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$.

9.273. $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \ge 9^{\sqrt{x}}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} + 9 \cdot 3^{2\sqrt[4]{x}} - 3^{2\sqrt{x}} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2\sqrt{x}}}{3^{2\sqrt[4]{x}}} - 8 \cdot \frac{3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt[4]{x}}}{3^{2\sqrt[4]{x}}} - 9 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}\right)^2 - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} - 9 \le 0.$$

Решая это неравенство как квадратное относительно $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$, имеем

$$-1 \le 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \le 9 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \le 9 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \le 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt[4]{x} \le 2, \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2 \le 0.$$

Решая это неравенство как квадратное относительно $\sqrt[4]{x}$, получим

$$-1 \le \sqrt[4]{x} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x \le 16.$$

Ответ: $x \in [0;16]$

9.274. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \ge \left(x^2+x+1\right)^3$.

Решение.

Из условия имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x^2+x+1\le 1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}\le 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x+1\ge 1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}\ge 3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+1>0,\\ x^2+x+1\le 1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}-3\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x\ge 0,\\ \dfrac{x+5}{x+2}-3\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in R,\\ x(x+1)\le 0,\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2)\ge 0,\\ x\ne -2;\end{cases}\\ \begin{cases}x(x+1)\ge 0,\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2)\le 0,\\ x\ne -2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\le x\le 0;\\ -2<x\le -1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-2;-1]\cup\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

9.275. $\dfrac{x^2-7\cdot|x|+10}{(x-3)^2}<0.$

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases}x^2-7\cdot|x|+10<0,\\ x\ne 3.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x^2-7x+10<0;\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\ne 3,\\ x^2-7x+10<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ -5<x<-2;\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\ne 3,\\ 2<x<5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$.

9.276. $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x.$

Решение.

Так как $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$, то из условия имеем $-\cos 5x-\sin 10x>0, \cos 5x+\sin 10x<0, \cos 5x+2\sin 5x\cos 5x<0,$

$$\cos 5x(1+2\sin 5x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 5x>0,\\ \sin 5x<-\dfrac{1}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 5x<0,\\ \sin 5x>-\dfrac{1}{2},\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}+2\pi n<5x<-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<5x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}<x<-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5};\\ \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}<x<\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5},\end{array}\right. n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)$, где $n\in Z$.

9.277. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)+\operatorname{tg}(x+12^\circ)>0.$

Решение.

Так как $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, то из условия имеем

$$\frac{\sin(x+12^\circ)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)}+\frac{\sin(x+12^\circ)}{\cos(x+12^\circ)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(x+12^\circ)\cos(x+12^\circ)+\sin(x+12^\circ)\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\cos(x+12^\circ)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(x+12^\circ)\left(\cos(x+12^\circ)+\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\cos\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(x+12^\circ)\left(\cos(x+12^\circ)+\frac{1}{2}\cos12^\circ-\frac{1}{2}\cos(x+12^\circ)\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\cos\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(x+12^\circ)(\cos(x+12^\circ)+\cos12^\circ)}{2\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\cos(x+12^\circ)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(x+12^\circ)\cos\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)\cos(x+12^\circ)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}(x+12^\circ)\operatorname{ctg}(x+12^\circ)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}>0.$$

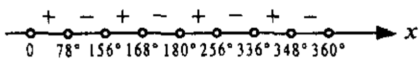
Рассмотрим область определения неравенства:

$$\begin{cases}\cos(x+12^\circ)\neq 0,\\ \sin\left(\dfrac{x}{2}+12^\circ\right)\neq 0,\\ \sin\dfrac{x}{2}\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+12^\circ\neq 90^\circ+180^\circ n,\\ \dfrac{x}{2}+12^\circ\neq 180^\circ n,\\ \dfrac{x}{2}\neq 180^\circ n,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 78^\circ+180^\circ n,\\ x\neq -24^\circ+360^\circ n, n\in Z.\\ x\neq 360^\circ n,\end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(x+12^\circ)=0, \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)=0, \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0\Rightarrow x_1=-12^\circ+180^\circ n,$$

$$x_2=156^\circ+360^\circ n, x_3=180^\circ+360^\circ n, n\in Z.$$

На промежуток $(0^\circ, 360^\circ)$ наносим область определения и найденные значения x_1, x_2 и x_3. Эти точки разбивают промежуток на восемь интервалов.



Методом интервалов находим решение неравенства $0 < x < 78^\circ$, $156^\circ < x < 168^\circ$, $180^\circ < x < 256^\circ$, $336^\circ < x < 348^\circ$. Третий и четвертый интервалы получаются при сдвиге первого и второго интервалов на 180°. Добавляя период, получаем $\left[\begin{array}{l}180^\circ n < x < 78^\circ+180^\circ n,\\ 156^\circ+180^\circ n < x < 168^\circ+180^\circ n,\end{array}\right. n\in Z.$

Ответ: $x\in(180^\circ n; 78^\circ+180^\circ n)\cup(156^\circ+180^\circ n; 168^\circ+180^\circ n), n\in Z.$

9.278. $\left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x+7|} < \left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$

Решение.

Неравенство равносильно неравенству

$$|x+7| < |x^2-3x+2|, |x+7| < |(x-2)(x-1)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-7,\\ -x-7<x^2-3x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}-7\le x<1,\\ x+7<x^2-3x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\ x+7<-x^2+3x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x+7<x^2-3x+2,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-7,\\ x^2-2x+9>0;\end{cases}\\ \begin{cases}-7\le x<1,\\ x^2-4x-5>0;\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\ x^2-2x+9<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x^2-4x-5>0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-7,\\ x\in R;\end{cases}\\ \begin{cases}-7\le x<1,\\ \left[\begin{array}{l}x>5,\\ x<-1;\end{array}\right.\end{cases}\\ \varnothing;\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ \left[\begin{array}{l}x>5,\\ x<-1,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-7,\\-7\le x<-1,\\x>5.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$.

9.279. $\log_x 10-0{,}5\log_a 10>0(0<a<1)$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\ne 1$.

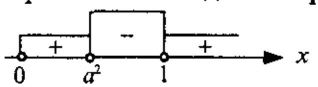
Перейдем к основанию 10.

Тогда имеем $\frac{1}{\lg x}-\frac{1}{2\lg a}>0\Leftrightarrow\frac{\lg a^2-\lg x}{2\lg x\cdot\lg a}>0,\frac{\lg a^2-\lg x}{\lg x\cdot\lg a}>0.$

При $0<a<1$, $\mathrm{tg}a<0$ и $\frac{\lg a^2-\lg x}{\lg x}<0$.

$\lg a^2-\lg x=0$ и $\lg x=0\Rightarrow x_1=a^2, x_2=1$.

Решаем последнее неравенство методом интервалов.



Таким образом, получаем $x\in(0;a^2)\cup(1;\infty)$.

Ответ: $x\in(0;a^2)\cup(1;\infty)$.

9.280. $\log_7 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 0{,}25$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 3, тогда

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 7}-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 2^{-2},\log_7 3\cdot\log_3 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>$$

$$>-2\log_2 2\Leftrightarrow(\log_7 3-\log_3 7)\cdot\log_3 x>-2\Leftrightarrow\log_3 x<\frac{2}{\log_3 7-\log_7 3},$$

$$0<x<3^{\frac{2}{\log_3 7-\log_7 3}}.$$

Ответ: $x\in\left(0;3^{\frac{2}{\log_3 7-\log_7 3}}\right)$

9.281. $x^{\log_a x+4}<a^4x(0<a<1)$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя обе части неравенства по основанию a, получаем $\log_a x^{\log_a x+4}>\log_a a^4 x$, $(\log_a x+4)\log_a x>\log_a a^4+\log_a x$, $\log_a^2 x+3\log_a x-4>0$.

Решая это неравенство как квадратное относительно $\log_a x$, имеем

$$\left[\begin{array}{l}\log_a x>1,\\ \log_a x<-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<a,\\ x>a^{-4}=\dfrac{1}{a^4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<a,\\ x>\dfrac{1}{a^4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;\,a)\cup\left(\dfrac{1}{a^4};\,\infty\right)$.

9.282. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}3x^2+5x+7\geq 0,\\ 3x^2+5x+2\geq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geq-\dfrac{2}{3},\\ x\leq -1.\end{array}\right.$

Из условия имеем

$\sqrt{3x^2+5x+7}>1+\sqrt{3x^2+5x+2} \Leftrightarrow 3x^2+5x+7>1+$

$+2\sqrt{3x^2+5x+2}+3x^2+5x+2$, $\sqrt{3x^2+5x+2}<2 \Leftrightarrow 3x^2+5x+2<4$,

$3x^2+5x-2<0 \Leftrightarrow -2<x<\dfrac{1}{3}$.

Учитывая ОДЗ, получаем $\left[\begin{array}{l}-2\leq x\leq -1,\\ -\dfrac{2}{3}\leq x<\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$

Ответ: $x\in(-2;\,-1)\cup\left(-\dfrac{2}{3};\,\dfrac{1}{3}\right)$.

9.283. $\log_x^2\sqrt{5}-\log_x 5\sqrt{5}+\dfrac{5}{4}<0$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Имеем $\dfrac{1}{4}\log_x^2 5-\dfrac{3}{2}\log_x 5+\dfrac{5}{4}<0$, $\log_x^2 5-6\log_x 5+5<0$. Решая это неравенство как квадратное относительно $\log_x 5$, получаем

$$1<\log_x 5<5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ x>5>x^5;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ x<5<x^5,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varnothing;\\ \begin{cases}x>1,\\ x>\sqrt[5]{5},\\ x<5,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt[5]{5}<x<5.$$

Ответ: $x\in(\sqrt[5]{5};5)$.

9.284. $|\log_3 x|<\left|\log_3\frac{x}{9}\right|$.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем неравенство в виде:

$$|\log_3 x|<|\log_3 x-2| \Leftrightarrow \log_3^2 x<\log_3^2 x-4\log_3 x+4, \log_3 x<1 \Leftrightarrow 0<x<3.$$

Ответ: $x\in(0;3)$.

9.285. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0.\end{cases}$

Из условия имеем:

$$\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0, \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0,$$

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0, \operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}>0 \Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0.$$

Решаем неравенство на промежутке $x\in(0;\pi)$.

$$1)\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=\pi n, n\in Z, x=-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$$

В интервал $(0;\ \pi)$ попадают $x_1=-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{9}, x_2=-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{9}$,

$x_3=-\frac{\pi}{9}+\pi=\frac{8\pi}{9}$;

$2)\sin 2x=0, \Leftrightarrow 2x=\pi k, k\in Z, x=\frac{\pi k}{2}, k\in Z,$

$\begin{cases}0<\frac{\pi k}{2}<\pi,\\ k\in Z,\end{cases} k=1.$

$x_4=\frac{\pi}{2}$;

$3)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\pi l, l\in Z, x=-\frac{\pi}{3}+pl, l\in Z,$

$\begin{cases}0<-\frac{\pi}{3}+\pi l<\pi,\\ l\in Z,\end{cases} l=1.$

$x_5=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2}{3}\pi.$

Точки $\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{9},\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{9}$ разбивают промежуток $(0;\pi)$ на шесть интервалов постоянного знака. Находя знаки на каждом интервале, получим:

$x\in\left(0;\frac{2\pi}{9}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{9}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3};\frac{8\pi}{9}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left(\pi n;\frac{2\pi}{9}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{9}+\pi n\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{8\pi}{9}+\pi n\right), n\in Z.$

Ответ: $x\in\left(\pi n;\frac{2\pi}{9}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{9}+\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{8\pi}{9}+\pi n\right), n\in Z.$

9.286. $\sin^3 x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3 x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)>\frac{3\sqrt{3}}{8}.$

Решение.

Имеем:

$$\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x>\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow \sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)+$$

$$+\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x)>\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow 4\sin^3 x\cos^3 x-3\sin^3 x\cos x+$$

$$+3\cos^3 x\sin x-4\sin^3 x\cos^3 x>\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow 3\cos x\sin x\times$$

$$\times(\cos^2 x-\sin^2 x)>\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow 4\cos x\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)>\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x>\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 4x>\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+2\pi n<4x<\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$

9.287. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$1-2\sin^2 x-(\sin 3x-\sin x)>0.$

$\cos 2x-2\sin x\cos 2x>0\Leftrightarrow \cos 2x(1-2\sin x)>0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(1-2\sin^2 x)(1-2\sin x)>0\Leftrightarrow\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin x<\frac{1}{2},\\ \sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ \frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.\\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

9.288. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x>8\sqrt{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$

Запишем неравенство в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x>8\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}-2\operatorname{tg}2x-$$

$$-4\operatorname{tg}4x>8\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\operatorname{tg}2x-2\operatorname{tg}4x>4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-$$

$$-2\operatorname{tg}4x>4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\sin 2x\cos 2x}-2\operatorname{tg}4x>4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x}-\operatorname{tg}4x>2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x}-\frac{\sin 4x}{\cos 4x}>2\sqrt{3}, \frac{\cos^2 4x-\sin^2 4x}{\sin 4x\cos 4x}>2\sqrt{3}, \frac{\cos 8x}{\sin 8x}>\sqrt{3}, \operatorname{ctg}8x>\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi n<8x<\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{\pi n}{8}<x<\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{8}, n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi n}{8};\frac{\pi}{48}(6n+1)\right), n\in Z.$

9.289. $4\sin x\sin 2x\sin 3x>\sin 4x.$

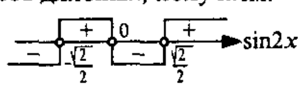
Решение.

$$4\sin x\sin 2x\sin 3x-2\sin 2x\cos 2x>0, \sin 2x(2\sin x\sin 3x-\cos 2x)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x)>0, \sin 2x\cos 4x<0,$$

$$\sin 2x(1-2\sin^2 2x)<0 \Leftrightarrow \left(\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sin 2x>0.$$

Методом интервалов для $\sin 2x$, получаем:



$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 2x<0, \\ \sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4}+2\pi n<2x<2\pi n, \\ \frac{\pi}{4}+2\pi n<2x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \\ \pi+2\pi n<2x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{8}+\pi n<x<\pi n, \\ \frac{\pi}{8}+\pi n<x<\frac{3\pi}{8}+\pi n, n\in Z. \\ \frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{8}+\pi n, \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{8}+\pi n;\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{8}+\pi n\right)\cup$

$\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{8}+\pi n\right), n\in Z.$

9.290. $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0.$

Решение.

Из условия имеем

$$\sin(2x+10^\circ)+2\sin 5^\circ\cos(x+5^\circ)<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin(x+5^\circ)\cos(x+5^\circ)+2\sin 5^\circ\cos(x+5^\circ)<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(x+5^\circ)(\sin(x+5^\circ)+\sin 5^\circ)<0 \Leftrightarrow \cos(x+5^\circ)2\sin\frac{x+10^\circ}{2}\cos\frac{x}{2}<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(x+5^\circ)\sin\frac{x+10^\circ}{2}\cos\frac{x}{2}<0.$$

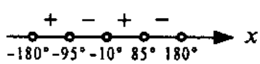
$\cos(x+5^\circ)=0, \sin\frac{x+10^\circ}{2}=0, \cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow x_1=85^\circ+180^\circ n,$

$x_2=-10^\circ+360^\circ n,\ x_3=180^\circ+360^\circ n, n\in Z.$

В промежутке от -180° до 180° получим четыре интервала.

На каждом из них определяем знак неравенства и получаем

$$\left[\begin{array}{l} -95^\circ+360^\circ n<x<-10^\circ+360^\circ n, \\ 85^\circ+360^\circ n<x<180^\circ+360^\circ n, \end{array}\right. n\in Z.$$



Ответ: $x\in(-95^\circ+360^\circ n;-10^\circ+360^\circ n)\cup$

$\cup(85^\circ+360^\circ n;180^\circ+360^\circ n), n\in Z.$

9.291. Показать, что $\frac{1}{8}<\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 70^\circ<\frac{1}{4}.$

Решение.

Из условия имеем:

$$1<8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 70^\circ<2, 1<4(2\cos 20^\circ\cos 40^\circ)\cos 70^\circ<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<4(\cos 20^\circ+\cos 60^\circ)\cos 70^\circ<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<4\cos 20^\circ\cos 70^\circ+2\cos 70^\circ<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<(2\cos 20^\circ\cos 70^\circ)+2\cos 70^\circ<2\Leftrightarrow 1<2(\cos 50^\circ+\cos 90^\circ)+2\cos 70^\circ<2,$$

$$1<2(\cos 50^\circ+\cos 70^\circ)<2\Leftrightarrow 1<4\cos 60^\circ\cos 10^\circ<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<2\cos 10^\circ<2, \frac{1}{2}<\cos 10^\circ<1, \frac{1}{2}=\cos 60^\circ<\cos 10^\circ<1.$$

Получили истинное неравенство, что и требовалось доказать.

9.292. Решить неравенство $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\ge 3\operatorname{tg} x$.

ОДЗ: $\cos x\ne 0$.

Перепишем неравенство в виде

$$\frac{2\cos^2 2x}{1+\cos 2x}\ge\frac{3\sin 2x}{1+\cos 2x}, \frac{2\cos^2 2x-3\sin 2x}{1+\cos 2x}\ge 0, \frac{2\sin^2 2x+3\sin 2x-2}{1+\cos 2x}\ge 0.$$

$1+\cos 2x>0$ при $\cos 2x\ne -1.\Rightarrow$

$$2\sin^2 2x+3\sin 2x-2\le 0, \left(2\sin 2x-\frac{1}{2}\right)\cdot(\sin 2x+4)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin 2x-\frac{1}{2}\le 0\Leftrightarrow\sin 2x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le 2x\le\frac{\pi}{6}+2\pi n,$$

$$-\frac{7\pi}{12}+\pi n\le x\le\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z.$$

Так как $\cos 2x\ne -1, 2x\ne\pi+2\pi n, x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, то окончательно

имеем $\left[\begin{array}{l}-\frac{7}{12}\pi+\pi n\le x<-\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ -\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le\pi n+\frac{\pi}{12},\end{array}\right. n\in Z.$

Ответ: $x\in\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi n; -\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{12}+\pi n\right], n\in Z.$

9.293. Показать, что $\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}50^\circ>3$.

Решение.

Из условия имеем:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ}+1>3, \frac{1}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ}>2,\ 2\cos 40^\circ \cos 50^\circ<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 10^\circ+\cos 90^\circ<1, \cos 10^\circ<1.$$

Имеем истинное неравенство, что и требовалось доказать.

9.294. Показать, что при условии $360^\circ k-45^\circ<\alpha<360^\circ k+45^\circ$, где $k\in Z$, выполняется неравенство $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}45^\circ+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)\geq 3$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)\geq 3-\operatorname{ctg}45^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin 90^\circ}{\sin(45^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}\geq 3-1=2.$ Так как $\sin(45^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)>0$, то имеем $2\sin(45^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)\leq 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha-\cos 90^\circ\leq 1, \cos 2\alpha\leq 1$.

Получили истинное неравенство, что и требовалось доказать.

9.295. Решить неравенство $3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x<\dfrac{1}{2}$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$3(1-\sin^2 x)\sin x-\sin^3 x<\frac{1}{2}, 3\sin x-3\sin^3 x-\sin^3 x<\frac{1}{2},$$

$$3\sin x-4\sin^3 x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 3x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{7}{6}\pi+2\pi n<3x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,$$

$$-\frac{7}{18}\pi+\frac{2\pi}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{18}(12n-7); \frac{\pi}{18}(12n+1)\right), n\in Z.$

9.296. Решить неравенство $\dfrac{\cos x+2\cos^2 x+\cos 3x}{\cos x+2\cos^2 x-1}>1$.

Решение.

Из условия имеем:

$$\frac{\cos x+2\cos^2 x+4\cos^3 x-3\cos x-\cos x-2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos^3 x-3\cos x+1}{2\cos^2 x+\cos x-1}>0\Leftrightarrow \frac{(\cos x+1)(2\cos x-1)^2}{2(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2}{(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x-\frac{1}{2}>0,\\ \cos x+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x>\frac{1}{2},\\ \cos x\neq -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{3}(6n-1); \frac{\pi}{3}(6n+1)\right), n\in Z.$

9.297. Решить неравенство $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

Решение.

Из условия имеем $(8\sin^4 x - 8\sin^2 x) + (\sin x - 1) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + (\sin x - 1) < 0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x(\sin x - 1)(\sin x + 1) + (\sin x - 1) < 0$, $(\sin x - 1)(8\sin^3 x + 8\sin^2 x + 1) < 0$.

Далее $\sin x - 1 < 0$ при $\sin x - 1 \neq 0$, $\sin x \neq 1$, $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$, а множитель $8\sin^3 x + 8\sin^2 x + 1 > 0$ (находится в пределах (1; 17)).

Ответ: $x\neq\frac{\pi}{2}(4n+1), n\in Z.$

9.298. Показать, что $2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\sqrt{2}+1$.

Решение.

Переходя к основанию 2, имеем

$$2<\sqrt{\log_2 3}+\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}<\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\log_2 3}+\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}>2,\\ \sqrt{\log_2 3}+\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}<\sqrt{2}+1.\end{cases}$$

1) $\frac{\left(\sqrt{\log_2 3}\right)^2-2\sqrt{\log_2 3}+1}{\sqrt{\log_2 3}}>0, \frac{\left(\sqrt{\log_2 3}-1\right)^2}{\sqrt{\log_2 3}}>0.$ Полученное неравенство истинно.

2) $\sqrt{\log_2 3}<\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}<1.$ Сложив левые и правые части этих неравенств, имеем $\sqrt{\log_2 3}+\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}<\sqrt{2}+1.$ Что и требовалось доказать.

9.299. Показать, что $\frac{1}{8} < \sin 20° \sin 50° \sin 70° < \frac{1}{4}$.

Решение.

Из условия имеем

$1 < 8\sin 20° \sin 50° \sin 70° < 2, 1 < 4(2\sin 20° \sin 70°)\sin 50° < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 < 4(\cos 50° - \cos 90°)\sin 50° < 2,\ 1 < 4\cos 50° \sin 50° < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin 100° < 1, \frac{1}{2} < \sin(90° + 10°) < 1,\ \frac{1}{2} < \cos 10° < 1,$

$\frac{1}{2} = \cos 60° < \cos 10° < 1.$

Что и требовалось доказать.

9.300. Решить неравенство $\log_{x^2-3} 729 > 3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0, \\ x^2 - 3 \neq 1, \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3}, \\ x < -\sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$

Переходя к основанию 3, имеем

$\frac{\log_3 729}{\log_3(x^2-3)} > 3, \frac{6}{\log_3(x^2-3)} - 3 > 0, \frac{2 - \log_3(x^2-3)}{\log_3(x^2-3)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_3(x^2-3) - 2) \cdot \log_3(x^2-3) < 0.$

Относительно $\log_3(x^2-3)$ методом интервалов получим

$0 < \log_3(x^2-3) < 2, 1 < x^2 - 3 < 9, 4 < x^2 < 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 12, \\ x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{12} < x < 12, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{12} < x < -2, \\ 2 < x < \sqrt{12}. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\sqrt{12}; -2) \cup (2; \sqrt{12})$

9.301. Решить неравенство $\frac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5 - x)} > 3$.

Решение.

ОДЗ: $0<a\neq 1$.

По формуле замены основания получаем

$$\log_{5-x}\left(35-x^3\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<5-x<1,\\ 35-x^3<(5-x)^3,\\ 35-x^3>0;\end{cases}\\ \begin{cases}5-x>1,\\ 35-x^3>(5-x)^3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4<x<5,\\ x^2-5x+6>0,\\ x<\sqrt[3]{35};\end{cases}\\ \begin{cases}x<4,\\ x^2-5x+6<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4<x<5,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<2,\end{array}\right.\\ x<\sqrt[3]{35};\end{cases}\\ \begin{cases}x<4,\\ 2<x<3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система решений не имеет. Для второй системы неравенств получаем $2<x<3$.

Ответ: $x\in(2;3)$.

9.302. Найти область определения функции: $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1}$.

Решение.

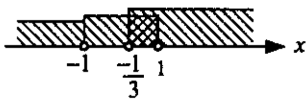
Из условия получаем

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\geq 1, \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\geq \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\leq\frac{1}{4}, \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\leq\frac{1}{4},\\ \left(\frac{x}{x+1}\right)^2>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq\frac{1}{2},\\ x\neq 0,\\ x\neq -1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}\le\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{x}{x+1}\ge-\dfrac{1}{2},\\ x\ne0,\\ x\ne-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+1)\le0,\\ (3x+1)(x+1)\ge0,\\ x\ne0,\\ x\ne-1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le1,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge-\dfrac{1}{3},\\ x\le-1,\end{array}\right.\\ x\le-1,\\ x\ne0,\\ x\ne-1.\end{cases}$$

Методом интервалов находим $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1]$



Ответ: $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1]$

9.303. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству $\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5}-x+1\right)>0$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5}-x+1\right)>\log_{0,3}1\Leftrightarrow0<\sqrt{x+5}-x+1<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+5}<x,\\ \sqrt{x+5}>x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\ge0,\\ x>0,\\ x+5<x^2,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0,\\ x+5\ge0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\ge1\\ x+5>x^2-2x+1,\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-5,\\ x>0,\\ x^2-x-5>0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1\\ x\ge-5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge1,\\ x^2-3x-4<0,\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x \ge -5, \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \\ x < \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -5 \le x < 1, \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ -1 < x < 4, \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{21}}{2} < x < 4. x = 3 \in Z.$$

Ответ: $x = 3$.

9.304. Указать такие значения x, при которых неравенство $y^2 - (5^x - 1)(y - 1) > 0$ выполняется для всех значений y.

Решение.

Имеем $y^2 - (5^x - 1)y + (5^x - 1) > 0, ay^2 + by + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$ Отсюда $D = (5^x - 1)^2 - 4(5^x - 1) < 0, (5^x - 1)(5^x - 1 - 4) < 0, (5^x - 1)(5^x - 5) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 < 5^x < 5;\ 5^0 < 5^x < 5^1 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

Ответ: $x \in (0;1)$.

9.305. Найти a из неравенства $x^2 - 2^{a+2} \cdot x - 2^{a+3} + 12 > 0$ при условии, что оно верно для любых значений x.

Решение.

Исходный квадратный трехчлен положителен тогда и только тогда, когда:

$$D = (2^{a+2})^2 - 4(12 - 2^{a+3}) = 2^{2a+4} + 4 \cdot 2^{a+3} - 48 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(2^a)^2 + 32 \cdot 2^a - 48 < 0 \Leftrightarrow (2^a)^2 + 2 \cdot 2^a - 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^a + 3)(2^a - 1) < 0 \Leftrightarrow 2^a < 1 \Leftrightarrow a < 0.$$

Ответ: $a \in (-\infty;0)$.

Решения к главе 10

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольный треугольник (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = \frac{1}{2} a h_a; \tag{10.1}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha; \tag{10.2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \tag{10.3}$$

$$r = \frac{S}{p}; \tag{10.4}$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \tag{10.5}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}; \tag{10.6}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусов)}; \tag{10.7}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \text{ (теорема синусов)}. \tag{10.8}$$

2. Прямоугольный треугольник (a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab; \tag{10.9}$$

$$S = \frac{1}{2} c h_c ; \tag{10.10}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} ; \tag{10.11}$$

$$R = \frac{c}{2} ; \tag{10.12}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора)}; \tag{10.13}$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c} ; \tag{10.14}$$

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} ; \tag{10.15}$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} ; \tag{10.16}$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta . \tag{10.17}$$

3. Равносторонний треугольник:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} ; \tag{10.18}$$

$$r = \frac{a \sqrt{3}}{6} ; \tag{10.19}$$

$$R = \frac{a \sqrt{3}}{3} . \tag{10.20}$$

4. Произвольный выпуклый четырехугольник (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi . \tag{10.21}$$

5. Параллелограмм (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = a h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi . \tag{10.22}$$

6. Ромб:

$$S = a h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \tag{10.23}$$

7. Прямоугольник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \tag{10.24}$$

8. Квадрат (d — диагональ):

$$S = a^2 = d^2/2. \tag{10.25}$$

9. Трапеция (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2}; \tag{10.26}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh. \tag{10.27}$$

10. Описанный многоугольник (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S = pr. \tag{10.28}$$

11. Правильный многоугольник (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3 = R\sqrt{3};\ a_4 = R\sqrt{2};\ a_6 = R; \tag{10.29}$$

$$S = \frac{n a_n r}{2}. \tag{10.30}$$

12. Окружность, круг (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C = 2\pi r; \tag{10.31}$$

$$S = \pi r^2. \tag{10.32}$$

13. Сектор (l — длина дуги, ограничивающей сектор; n° — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; \tag{10.33}$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha. \tag{10.34}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

2. Длина медианы треугольника выражается формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2} ,$$

где a , b , c — длины сторон треугольника.

3. Длина стороны треугольника выражается формулой

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2} ,$$

где m_a , m_b , m_c — длины медиан треугольника.

4. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

5. Длина биссектрисы треугольника выражается формулой

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1} ,$$

где a и b — длины двух сторон треугольника ABC ; a_1 и b_1 — отрезки третьей стороны.

6. Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a , b и c по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} .$$

7. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a , h_b , h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} .$$

8. Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е. $S = h^2$.

9. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.

Доказательство всех этих дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

10.361. В треугольнике ABC (рис. 10.1) величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, равны соответственно 12 и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

Решение.

Если AD — биссектриса $\angle A$, то

$\angle DAC = \angle ABC \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{3}.$$

Таким образом, получаем

$$AD = BD = BC - DC = 12 - \frac{16}{3},$$

$$AB = \frac{AD \cdot AC}{DC} = 10.$$

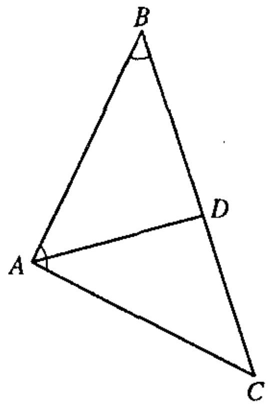


Рис. 10.1

Ответ: 10 см.

10.362. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна m, радиус вписанной окружности равен r. Определить катеты. При каком соотношении между r и m задача имеет решение?

Решение.

Пусть x, y — катеты данного треугольника, тогда по теореме Пифагора получаем:

$$\begin{cases} r = \dfrac{x+y-m}{2}, \\ m^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r + m = x + y, \\ m^2 = (x+y)^2 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2r + m, \\ xy = 2r^2 + 2rm \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2r + m + \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4rm}}{2}, \\ y = \dfrac{2r + m - \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4rm}}{2}, \quad m^2 \geq 4r^2 + 4rm \Leftrightarrow r \leq \dfrac{m\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}, \\ m^2 \geq 4r^2 + 4rm. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{2r + m \pm \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4rm}}{2}$ при $r \leq \dfrac{m\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}$.

10.363. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48 см. Найти боковую сторону данного треугольника. (рис. 10.2)

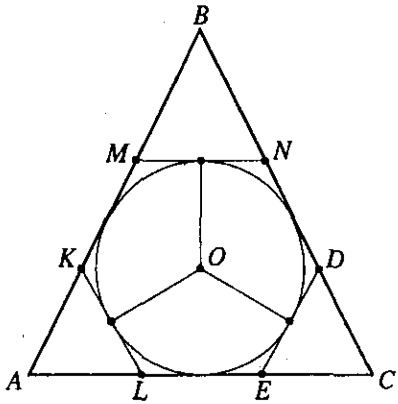


Рис. 10.2

Решение.

Предположим, что касательные MN, EF, KL к окружности, вписанной в данный ΔABC с основанием AC=12, отсекают малые ΔMBN, ΔDCE, ΔAKL с периметрами P_1, P_2, P_3 соответственно. Тогда

$KM+NF+EL=$

$=MN+ED+KL\Rightarrow$

$\Rightarrow AB+BC+AC=$

$=(BM+BN)+(CD+CE)+$

$+(AK+KL)+(KM+ND+EL)=$

$$=(BM+BN)+(CD+CE)+(AK+AL)+(MN+ED+KL)=$$

$$=P_1+P_2+P_3=48\Rightarrow AB+BC=36\Rightarrow AB=18.$$

Ответ: 18 см.

10.364. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найти длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника. (рис. 10.3)

Решение.

Проведем касательные MN, KL к окружности, вписанной в данный ΔABC с основанием AC. Пусть E и F — точки касания касательных и окружности; P, D, Q — точки касания окружности со сторонами AB, AC, BC; $MN\,||\,AC$, $KL\,||\,BC$. Имеем:

$$ME=MP,\ NE=NQ,$$

следовательно периметр P_1 ΔBMN равен $BP+BQ=2m$. Аналогично, $KF=KP,\ LF=LD,$ поэтому периметр P_2 ΔAKL равен $AP+AD=2n$. Периметр P_3 ΔABC равен

$$2\cdot AB+2\cdot AD=2m+4n.$$

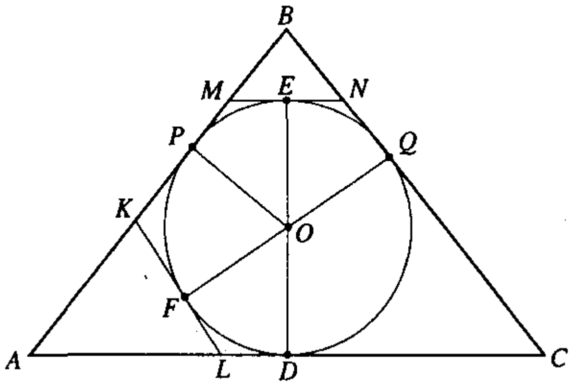


Рис. 10.3

Периметры подобных треугольников относятся как соответствующие стороны $\Rightarrow \frac{P_1}{P_3} = \frac{MN}{AC}$ $(\Delta BMN \sim \Delta ABC)$,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{KL}{BC} \ (\Delta AKL \sim \Delta ABC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2mn}{m+2n},\ KL = \frac{n(m+n)}{m+2n}.$$

Ответ: $\frac{2mn}{m+2n}$; $\frac{n(m+n)}{m+2n}$.

10.365. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3}+1$.

Решение.

Пусть a, b — катеты данного треугольника, c — его гипотенуза, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Тогда

$$R = \frac{c}{2},\ r = \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{a+b-c}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 =$$

$$= \sin\alpha + \cos\alpha - 1,$$

где a — один из острых углов треугольника.

Имеем тригонометрическое уравнение:

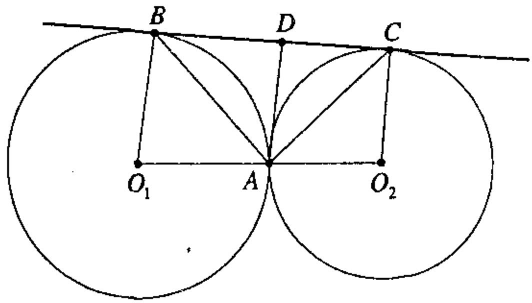


Рис. 10.4

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sin\alpha+\cos\alpha \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2=1+\sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где $0<\alpha<90°$.

Ответ: 30°, 60°.

10.366. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8 см. (рис. 10.4)

Решение.

Проведем общую касательную BC к двум данным окружностям с центрами O_1 и O_2 (B и C — точки касания), $AB=8$, $AC=6$.

Проводим касательную в точке A до пересечения с BC в точке D. Тогда $DA=DB=DC \Rightarrow \angle BAC=90° \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{6^2+8^2}=10, BD=5, \angle AO_2C=180°-\angle ADC=\angle BDA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ACO_2 \Rightarrow \frac{BD}{AO_2}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow AO_2=\frac{15}{4}.$$

Рассуждая аналогично, получаем $AO_1=\dfrac{20}{3}$.

Ответ: $\dfrac{15}{4}$ см, $\dfrac{20}{3}$ см.

10.367. Сторону правильного десятиугольника выразить через радиус R описанной окружности. (рис. 10.5)

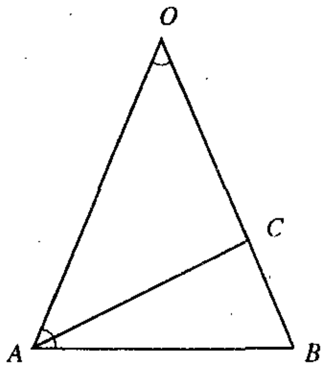


Рис. 10.5

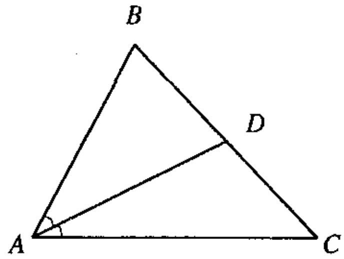


Рис. 10.6

Решение.

Если AB — сторона данного правильного десятиугольника с центром O, то $AO = BO = R$, $\angle A = \angle B = 72°$. Проводим биссектрису AC.

Тогда $\angle AOC = \angle OAC = 36°$,

$\angle ACB = \angle ABC = 72° \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AB = OC, BC = R - AB.$

Далее, имеем

$$\frac{BC}{OC} = \frac{AB}{AO} \Rightarrow \frac{R - AB}{AB} = \frac{AB}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 + R \cdot AB - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} R.$

10.368. Вычислить длину биссектрисы угла A треугольника ABC с длинами сторон $a = 18$ см, $b = 15$ см, $c = 12$ см. (рис. 10.6)

Решение.

Пусть AD — биссектриса $\angle A$ данного ΔABC, тогда

$$\frac{CD}{BK} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{18 - BD}{BD} = \frac{15}{12} \Rightarrow BD = 8, \; CD = 10.$$

Применяя теорему косинусов к ΔABD и ΔACD, получим:

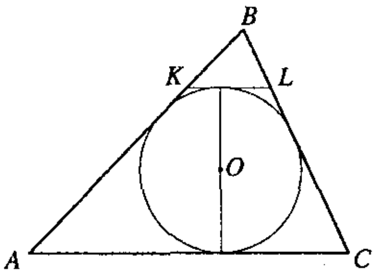


Рис. 10.7

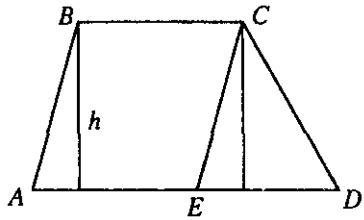


Рис. 10.8

$$\begin{cases} 8^2 = 12^2 + AD^2 - 24 \cdot AD \cdot \cos\angle DAB, \\ 10^2 = 15^2 + AD^2 - 30 \cdot AD \cdot \cos\angle DAB \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AD^2 - 24 \cdot AD \cdot \cos\angle DAB + 80 = 0, \\ AD^2 - 30 \cdot AD \cdot \cos\angle DAB + 125 = 0 \end{cases} \Rightarrow AD = 10.$$

Ответ: 10 см.

10.369. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, содержит 2,4 см. Найти основание треугольника. (рис. 10.7)

Решение.

Если KL — касательная к окружности, вписанной в данный ΔABC, то $KL \parallel AC$, KL=2,4. Тогда

$$KL = AM + CL - AC \Rightarrow BK + BL + KL = (BK + AK) + (BL + CL) -$$

$$-AC = AB + BC + AC - 2 \cdot AC = 20 - 2 \cdot AC.\ \Delta KBL \sim \Delta ABC \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{20 - 2 \cdot AC}{20} = \dfrac{KL}{AC}$ (периметры подобных треугольников относятся, как их соответствующие стороны)$\Rightarrow$

$$\Rightarrow AC^2 - 10 \cdot AC + 24 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AC = 4 \\ AC = 6. \end{array}\right.$$

Ответ: 4 см или 6 см.

10.370. Большая из параллельных сторон трапеции равна a, меньшая равна b, непараллельные стороны равны c и d. Найти площадь трапеции. (рис. 10.8)

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция,

$AD = a, BC = b,\ AB = c, CD = d,$

h — высота трапеции. Проведем $CE \parallel AB$. Тогда

$$ED = a - b, CE = c, h = \frac{2S_{ECD}}{a-b},$$

$$S_{ABCE} = h \cdot AE = \frac{2b \cdot S_{ECD}}{a-b} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABCE} + S_{ECD} = S_{ECD} \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

По формуле Герона

$$S_{ECD} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c+d-b)(a+d-b-c)(a+c-b-d)(b+c+d-a)}.$$

Таким образом, искомая площадь $S = S_{ABCE} + S_{ECD}$.

Ответ: $\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a+c+d-b)(a+d-b-c)(a+c-b-d)(b+c+d-a)}.$

10.371. Точка C_1 — основание высоты CC_1 треугольника ABC. Найти зависимость между углами A и B, если $CC_1^2 = C_1A \cdot C_1B$.

Решение.

Из условия имеем $\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{BC_1}{CC_1} \Rightarrow \Delta ACC_1 \sim \Delta BCC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAC_1 = \angle BCC_1$. Пусть $\angle A < 90°, \angle B < 90°$, тогда

$\angle A = \angle CAC_1 = \angle C_1CB = 90° - \angle B \Rightarrow \angle A + \angle B = 90°$.

Если $\angle A > 90°$, то $180° - \angle A = \angle CAC_1 = \angle C_1CB = 90° -$

$- \angle B \Rightarrow \angle A - \angle B = 90°$.

Аналогично, если $\angle B > 90°$, то $\angle B - \angle A = 90°$. Окончательно получаем

Ответ: $\angle A + \angle B = 90°$ или $|\angle A - \angle B| = 90°$.

10.372. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найти длину хорды DC, если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на расстояние n. (рис. 10.9)

Решение.

Пусть O — центр окружности, вписанной в данный ΔABC, тогда

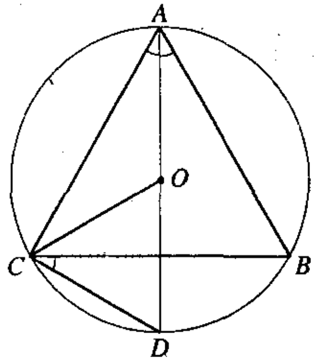


Рис. 10.9

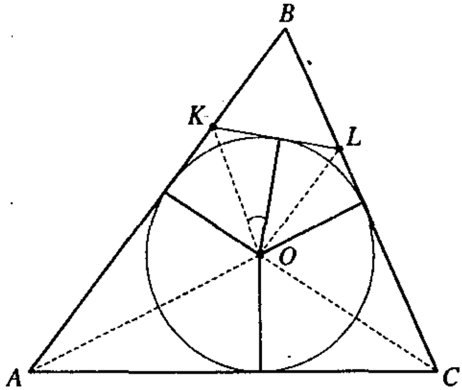


Рис. 10.10

$\angle BCD = \angle BAD \Rightarrow \angle BCD + \angle OCB = \angle CAD + \angle ACO = \angle COD$ (внешний угол) $\Rightarrow \angle OCD = \angle COD \Rightarrow OD = CD = n$.

Ответ: n.

10.373. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника. (рис. 10.10)

Решение.

Проведем касательную KL к окружности, вписанной в данный ΔABC, где $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 6$. Тогда

$BK + BL + KL = (10 - AK) + (12 - CL) + (AK + CL - 6) = 16$, так как $KL = AK + CL - AC$.

Ответ: 16 см.

10.374. Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 8 см, ее площадь 21 см^2. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции? (рис. 10.11)

Решение.

Пусть CE — высота данной равнобедренной трапеции $ABCD$, $BC = 4$, $AD = 8$. Тогда

$$ED = \frac{AD - BC}{2} = 2,\ CE = \frac{2S_{ABCD}}{4+8} = \frac{7}{2},$$

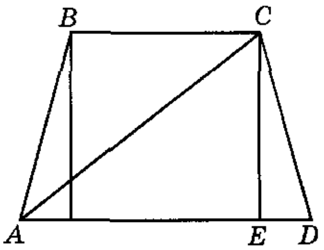


Рис. 10.11

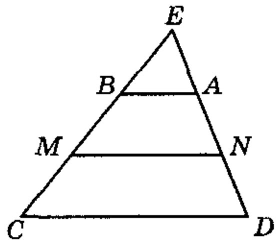


Рис. 10.12

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \frac{\sqrt{67}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB = CD > BC \Rightarrow \angle CAD = \angle BCA > \angle BAC$, следовательно, биссектриса угла A должна лежать внутри $\angle CAD$, т.е. пересекает сторону CD.

Ответ: боковую сторону.

10.375. Правильный треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R, повернут вокруг центра окружности на 90° в положение $A_1B_1C_1$. Вычислить площадь шестиугольника $AA_1BB_1CC_1$.

Решение.

Пусть O — центр окружности, описанной около данного правильного ΔABC. Тогда шестиугольник $AA_1BB_1CC_1$ состоит из трех равных треугольников ΔOAA_1, ΔOBB_1, ΔOCC_1 и трех равных треугольников ΔOA_1B, ΔOB_1C, ΔOC_1A. Так как $\angle AOB = 120°$ и поворот производится вокруг O на 90°, то $\angle AOA_1 = 90°$, $\angle A_1OB = 30° \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{AA_1BB_1CC_1} = 3(S_{OAA_1} + S_{OA_1B}) = 3\left(\frac{R^2 \sin 90°}{2} + \frac{R^2 \sin 30°}{2}\right) = \frac{9R^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{9R^2}{4}$.

10.376. Длины оснований AB и DC трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая, параллельная AB, пересекает стороны BC и AD в точках M и N. Вычислить MN, если трапеции $ABMN$ и $NMCD$ равновелики (рис. 10.12).

Решение.

Продолжим стороны CB и DA до пересечения в точке E. Пусть

$$x = MN,\ S_1 = S_{ABMN} = S_{NMCD},\ S_2 = S_{AEB};\ \Delta ECD \sim \Delta EMN \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{x^2} = \frac{2S_1 + S_2}{S_1 + S_2};\ \Delta AEB \sim \Delta NEM \Rightarrow \frac{a^2}{x^2} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{2S_1 + 2S_2}{S_1 + S_2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Ответ: $MN = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

10.377. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки длиной 4 и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами? (рис. 10.13)

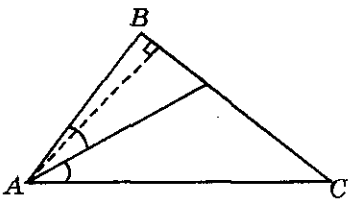


Рис. 10.13

Решение.

Пусть биссектриса угла A делит сторону BC данного ΔABC на отрезки 2 и 4. Положим $AB < AC$ и $AB = a$. Тогда $AC = 2a$ и по свойству сторон произвольного треугольника

$6 = BC < |AB - AC| = a$. Далее, $a = AB > h = \sqrt{15}$

(h — высота ΔABC) $\Rightarrow \sqrt{15} < a < 6 \Rightarrow 4 \le a \le 5$.

Если $a = 5$, то по формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{231}}{4},$$

а, с другой стороны, $S_{ABC} = BC \cdot \dfrac{h}{2} = 3\sqrt{15}$ — противоречие. Таким образом, $a = 4$.

Ответ: 4 см, 8 см, 6 см.

10.378. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Четыре точки касания их внешних общих касательных A, B, C, D последовательно соединены. Показать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найти ее радиус, если радиусы данных окружностей равны R и r (рис. 10.14).

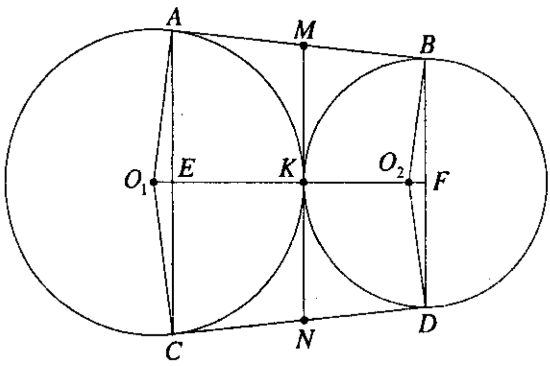


Рис. 10.14

Решение.

Если K — точка касания двух данных окружностей с центрами O_1 и O_2, то проводим через K их общую касательную MN до пересечения с их внешними касательными AB и CD в точках M и N.

$OA \parallel PB, OC \parallel PD \Rightarrow \angle AO_1C = \angle BO_2D$ (углы с параллельными сторонами) $\Rightarrow \Delta O_1AC \sim \Delta O_2BD \Rightarrow AC \parallel BD$. Так как

$$MA = MK = MB,\ NC = NK = ND,$$

то MN — средняя линия трапеции $ABCD$, $AB + CD = 2 \cdot MN = AC + BD$ и в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, центр которой в точке K и радиус которой $x = KF = KE$.

Если O_1O_2 пересекает AC и BD в точках E и F, то

$O_1O_2 \perp MN \Rightarrow O_1O_2 \perp AC,\ O_1O_2 \perp BD \Rightarrow O_1E$ и O_2F — высоты ΔO_1AC и $\Delta O_2BD \Rightarrow \dfrac{O_1E}{O_2F} = \dfrac{R}{r}$ (высоты подобных треугольников пропорциональны соответствующим сторонам) $\Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{R - KE}{KF - r} \Rightarrow x = \dfrac{2Rr}{R + r}$.

Ответ: $\dfrac{2Rr}{R+r}$.

10.379. Высота и медиана треугольника, проведенные внутри него из одной его вершины, различны и образуют равные углы со сторонами,

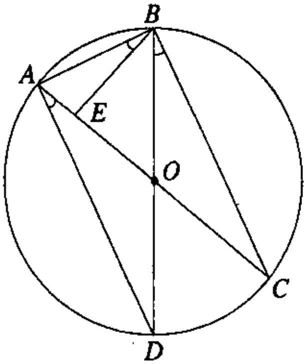


Рис. 10.15

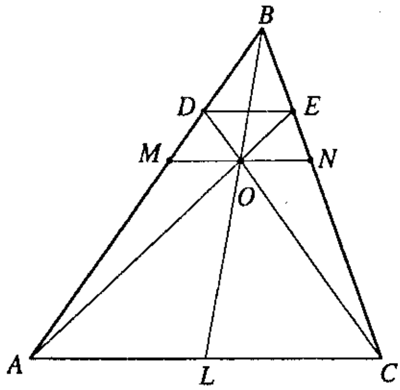


Рис. 10.16

выходящими из той же вершины. Определить радиус описанной окружности, если медиана равна m. (рис.10.15)

Решение.

Пусть BE —высота, BO — медиана данного ΔABC.

Продолжим медиану до пересечения в точке D с окружностью, описанной около ΔABC. Тогда $\angle CAD = \angle CBD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD + \angle BAC = \angle ABE + \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cup BCD = 180^\circ \Rightarrow BD \text{ — диаметр.}$$

Так как срединный перпендикуляр к стороне AC ΔABC пересекает диаметр BD в точке O, то O — центр окружности, $BO = m$ — ее радиус.

Ответ: m.

10.380. Через точку D, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону BC в точке E. Доказать, что AE, CD и медиана, проведенная через вершину B, пересекаются в одной точке. (рис.10.16)

Решение.

Пусть O — точка пересечения AE и CD, тогда проведем через O отрезок BL и докажем, что BL — медиана. Далее, проводим через O отрезок $MN \parallel AC$. $\Delta DOM \sim \Delta DCA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MO}{AC} = \frac{DM}{DA}. \text{ Аналогично, } \frac{ON}{AC} = \frac{EN}{EC}.$$

Так как $\dfrac{DM}{DA} = \dfrac{EN}{EC}$, то

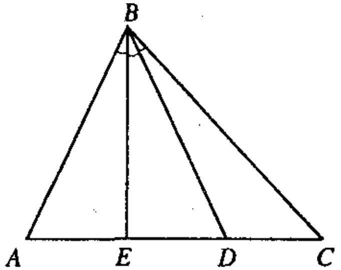


Рис. 10.17

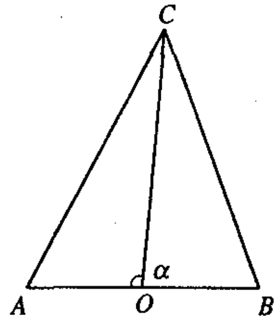


Рис. 10.18

$$\frac{MO}{AC}=\frac{ON}{AC}\Rightarrow MO=ON\Rightarrow AL=LC\ \left(\frac{MO}{AL}=\frac{BO}{BL}=\frac{ON}{LC}\right),$$

что и требовалось доказать.

10.381. Высота треугольника, равная 2 см, делит угол треугольника в отношении 2:1, а основание треугольника — на части, меньшая из которых равна 1 см. Определить площадь треугольника. (рис. 10.17)

Решение.

Пусть BE — высота данного ΔABC, тогда $BE=2$, $AE=1$. Проведем биссектрису BD угла EBC. Получаем

$\angle ABE=\angle EBD=\angle DBC$ (по условию) $\Rightarrow AE=ED=1$. Таким образом,

$$\frac{ED}{DC}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow DC=\frac{BC}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{BE^2+EC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+(1+DC)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow DC=\frac{5}{3},\ AC=\frac{11}{3},\ S_{ABC}=\frac{11}{3}.$$

Ответ: $\frac{11}{3}$ см².

10.382. Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до концов диаметра другой окружности не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра. (рис.10.18)

Решение.

Пусть AB — диаметр одной из данных концентрических окружнос-

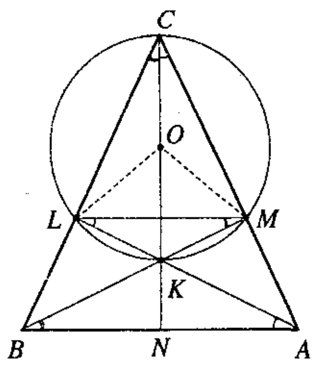


Рис. 10.19

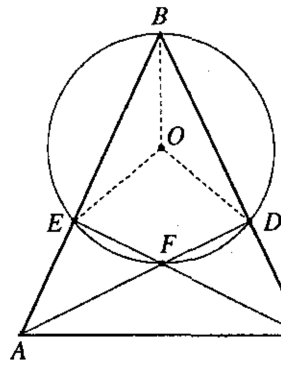


Рис. 10.20

тей радиуса r, C — произвольная точка другой окружности радиуса R, O — их общий центр,

$\alpha = \angle AOC$. Тогда по теореме косинусов,

$$\begin{cases} AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2\cdot AO\cdot CO\cdot\cos\alpha, \\ BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2\cdot BO\cdot CO\cdot\cos(180^\circ - \alpha) \end{cases} \Rightarrow AC^2 + BC^2 =$$

$= AO^2 + BO^2 + 2\cdot CO^2 = 2r^2 + 2R^2$, что и требовалось доказать.

10.383. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Показать, что медиана CN образует со сторонами AC и BC такие же углы, что и медианы BM и AL со стороной AB. (рис. 10.19)

Решение.

Из условия имеем $\angle KCM = \angle KLM$ и $\angle KLM = \angle NAK$ (так как $LM \parallel AB$) $\Rightarrow \angle KCM = \angle NAK$, что и требовалось доказать.

10.384. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке F. Точки B, D, E, F лежат на одной окружности. Показать, что угол B равен 60°. (рис. 10.20)

Решение.

Из условия имеем

$$\angle EFD = 180^\circ - (\angle FAC + \angle FCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) \Rightarrow$$

$$2\angle B = \angle A + \angle C \Rightarrow 3\angle B = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ,$$

что и требовалось доказать.

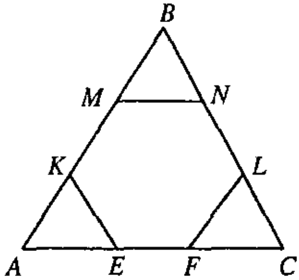


Рис. 10.21

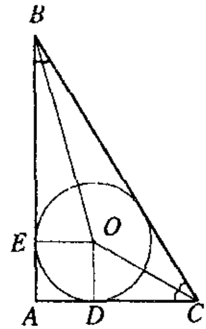


Рис. 10.22

10.385. Площадь треугольника равна S. Каждая сторона треугольника разделена на три части в отношении $m : n : m$. Определить площадь шестиугольника, вершинами которого служат точки деления. (рис. 10.21)

Решение.

Если точки K, M, N, L, F, E делят стороны данного ΔABC в отношении $m : n : m$, то

$$\frac{BM}{AB}=\frac{m}{2m+n}=\frac{BN}{BC}\Rightarrow \Delta MBN\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{S_{MBN}}{S}=\frac{m^2}{(2m+n)^2}.$$

Аналогично,

$$S_{AKE}=S\cdot\frac{m^2}{(2m+n)^2}=S_{FLC}\Rightarrow S_{MNLFEK}=S-3\cdot S_{MBN}=$$

$$=S\left(1-\frac{3m^2}{(2m+n)^2}\right).$$

Ответ: $S\left(1-\frac{3m^2}{(2m+n)^2}\right)$.

10.386. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты. (рис. 10.22)

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса r, вписанной в данный ΔABC,

$OB = \sqrt{10}$, $OC = \sqrt{5}$, E и D — точки касания окружности O с катетами. Тогда

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 135^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot BC \times$$
$$\times \cos 135^\circ = 25 \text{ (теорема косинусов)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 5,\ S_{OBC} = \frac{r \cdot BC}{2} = \frac{OB \cdot BC}{2} \cdot \sin 135^\circ = \frac{5}{2} \Rightarrow r = 1,$$

$$BE = \sqrt{OB^2 - 1} = 3,\ CD = \sqrt{OC^2 - 1} = 2 \Rightarrow AB = r + BE = 4,$$

$$AC = r + CD = 3 \text{ } (AEOD \text{ — квадрат}).$$

Ответ: 3 и 4.

10.387. В треугольнике ABC каждая высота h_c и h_b не меньше стороны, на которую она опущена. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть $\alpha = \angle ABC$, $c = AB$, $b = AC$, тогда

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow b \cdot \sin\alpha = h_c,\ c \cdot \sin\alpha = h_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot (b + c) = h_b + h_c. \text{ Так как } h_b \geq b,\ h_c \geq c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot (b + c) \geq b + c \Rightarrow \sin\alpha = 1,\ \alpha = 90^\circ,\ h_c = b,\ h_b = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = h_b \geq b = h_c \geq c \Rightarrow b = c.$$

Ответ: 90°, 45°, 45°.

10.388. Сторона BC треугольника ABC равна a; каждая из двух высот, опущенных на стороны AB и AC, не меньше стороны, на которую она опущена. Найти длины сторон AB и AC.

Эта задача есть простая вариация задачи 10.387.

Ответ: $AB = AC = 0{,}5a\sqrt{2}$.

10.389. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 25$ см и $AC = 14$ см. Вычислить радиус круга, касающегося BC в точке D — основании высоты AD и проходящего через середину AC (рис. 10.23).

Решение.

Если O — центр окружности, проходящей через середину E основания AC и касающейся стороны BC в точке D, то

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 24.$$

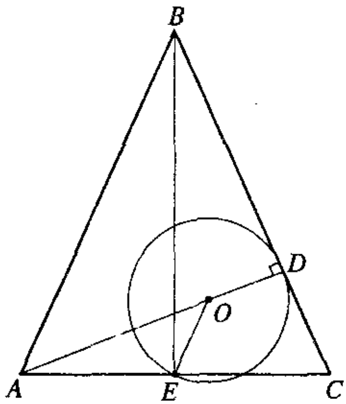


Рис. 10.23

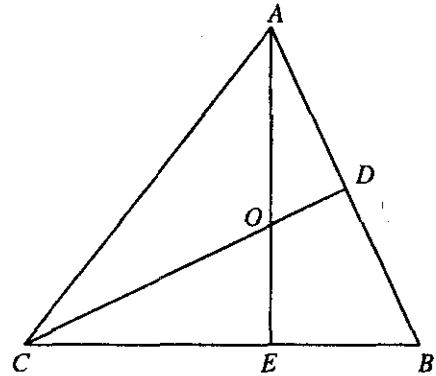


Рис. 10.24

$$AC \cdot BE = BC \cdot AD \Rightarrow AD = 13{,}44 \Rightarrow \cos\angle CAD = \frac{AD}{AC} = 0{,}96.$$

Пусть $x = OD = OE$, тогда по теореме косинусов для ΔAOE

$$x^2 = OE^2 = (AD - x)^2 + AE^2 - 2(AD - x)AE \cdot 0{,}96 \Rightarrow x = \frac{175}{48}.$$

Ответ: $\frac{175}{48}$ см.

10.390. В треугольнике ABC со сторонами $a = 14$ см, $b = 15$ см, $c = 13$ см найти расстояние от точки пересечения высот до вершины A. (рис. 10.24)

Решение.

Пусть O — точка пересечения высот AE и CD данного ΔABC,

$AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

$$\Delta ADO \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AO = \frac{AD \cdot AB}{AE}.$$

Так как $AD = AC \cdot \cos\angle A$, $2S_{ABC} = BC \cdot AE = AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$,

$$AE = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\angle A}{BC} \Rightarrow AO = \frac{AB \cdot AC \cdot \cos\angle A}{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin\angle A}{BC}} = BC \cdot \mathrm{ctg}\angle A.$$

По теореме косинусов для ΔABC

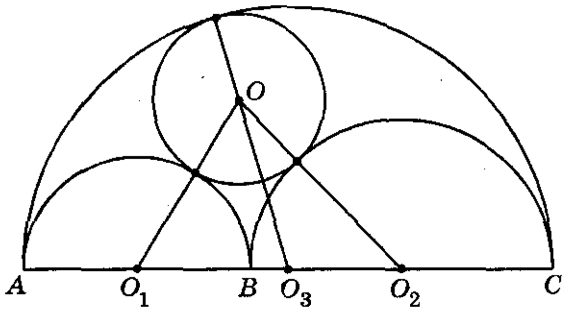


Рис. 10.25

$$\cos\angle A = -\frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{33}{65},$$

$$\sin\angle A = \frac{56}{65},\ \operatorname{ctg}\angle A = \frac{33}{56} \Rightarrow AO = \frac{33}{4}.$$

Ответ: $\frac{33}{4}$ см.

10.391. На отрезке AC дана точка B, причем $AB = 14$ см, $BC = 28$ см. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности в одной полуплоскости относительно границы AC. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей (рис. 10.25).

Решение.

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры полуокружностей радиусов r_1, r_2, r_3 с данными диаметрами AB, BC и AC соответственно; O — центр окружности радиуса x, касающейся всех трех полуокружностей.

Тогда $OO_1 = x + r_1,\ OO_2 = x + r_2,\ OO_3 = x + r_3,$

$O_1O_3 = r_3 - r_1,\ O_2O_3 = r_3 - r_2;\ r_1 = 7,\ r_2 = 14,\ r_3 = 21$ (по условию). По теореме косинусов в ΔO_1OO_3 и ΔO_3OO_2 получаем:

$$\begin{cases}(7+x)^2 = 14^2 + (21-x)^2 - 28\cdot(21-x)\cdot\cos\angle O_1O_3O,\\ (14+x)^2 = 7^2 + (21-x)^2 - 14\cdot(21-x)\cdot\cos(180^\circ - \angle O_1O_3O)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7+x)^2 + 2(14+x)^2 = 14^2 + 2\cdot 7^2 + 3(21-x)^2 \Rightarrow x = 6.$$

Ответ: 6 см.

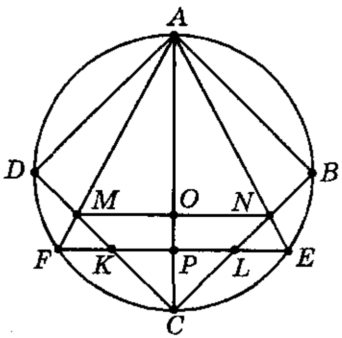


Рис. 10.26

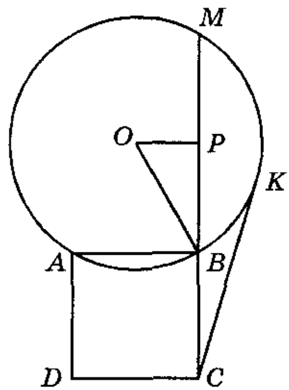


Рис. 10.27

10.392. В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата (рис. 10.26).

Решение.

Если квадрат $ABCD$ и правильный ΔAEF вписаны в данный круг радиуса R, а M, N, K, L — точки пересечения сторон квадрата и треугольника, то AC — ось симметрии и имеем

$$MN \perp AC,\ AC \perp EF \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{3}}{2}EF = \frac{3}{2}R,\ PC = 2R - AP = \frac{R}{2}.$$

Пусть

$$x = OP, \text{ тогда } MO = OC = x + \frac{R}{2},\ AO = MO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \left(x + \frac{R}{2}\right) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R = AO + OC = x(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}+1)\frac{R}{2} \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1)^2.$$

$$S_{ANLKM} = S_{ANCM} - S_{CKL} = \frac{AC \cdot MN}{2} - PC^2 = \frac{2R(2x+R)}{2} - \frac{R^2}{4} =$$

$$= \frac{R^2(8\sqrt{3}-9)}{4}.$$

Ответ: $\frac{R^2(8\sqrt{3}-9)}{4}$.

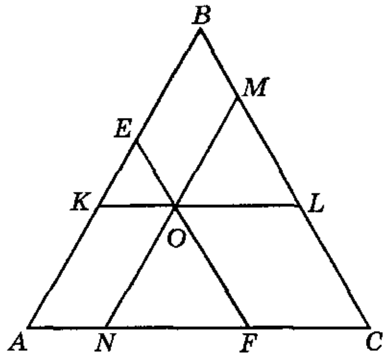


Рис. 10.28

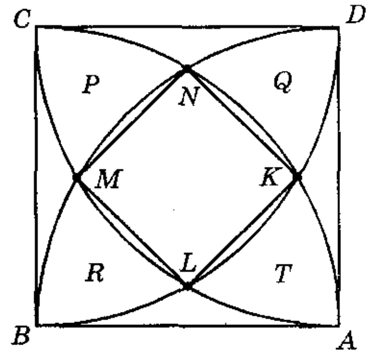


Рис. 10.29

10.393. Через смежные вершины квадрата проведена окружность так, что касательная к ней, проведенная из третьей вершины, равна удвоенной стороне квадрата. Найти площадь этого квадрата, если радиус окружности равен R (рис. 10.27).

Решение.

Пусть $AB = BC = x$ — сторона квадрата; тогда по условию $CK = 2x$. Продолжим CB до пересечения с окружностью в точке M. Согласно теореме о касательной и секущей, имеем $CK^2 = CM \cdot BC$, или $4x^2 = CM \cdot x$, откуда $CM = 4x$. Значит, $BM = 3x$. Теперь проведем $OP \perp PB$; из ΔOPB следует, что $OB^2 = OP^2 + PB^2$, или $R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2$, т.е. $R^2 = \frac{5}{2}x^2$.

Итак, $x^2 = \frac{2}{5}R^2 = 0{,}4R^2$.

Ответ: $0{,}4R^2$.

10.394. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка (рис. 10.28), и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Площади этих треугольников равны S_1, S_2 и S_3. Доказать, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Решение.

Проведем $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $KL \parallel AC$, тогда $S_1 = S_{OKE}$,

$$S_2 = S_{OML},\ S_3 = S_{OFN},\ S = S_{ABC},\ \left(\frac{KO}{AC}\right)^2 = \frac{S_1}{S},\ \left(\frac{OL}{AC}\right)^2 = \frac{S_2}{S},$$

$$\left(\frac{NF}{AC}\right)^2 = \frac{S_3}{S} \Rightarrow \left(\frac{NF}{AC}\right)^2 = \frac{S_3}{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{KO+OL+NF}{AC} = \frac{AN+FC+NF}{AC} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$, что и требовалось доказать.

10.395. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной a. Радиусы этих кругов равны a. Определить площадь их общей части. (рис. 10.29)

Решение.

Общая часть $MPNQKTLRM$ четырех кругов радиуса a с центрами в вершинах данного квадрата $ABCD$ состоит из четырех одинаковых сегментов MPN, NQK, KTL, LRM и квадрата $MNKL$. Так как M, N, K, L — точки пересечения данных кругов, то ΔABN и ΔAMD — правильные треугольники (их стороны равны a) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BAN = \angle DAM = 60° \Rightarrow \angle MAN = 30° \Rightarrow S_{AMPN} = \frac{\pi a^2}{12},$$

$$S_{AMN} = \frac{a^2}{2}\sin 30° = \frac{a^2}{4} \Rightarrow S_{MPN} = S_{AMPN} - S_{AMN} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}-1\right).$$

По теореме косинусов для ΔAMN

$$MN^2 = 2a^2 - 2a^2\cos 30° = a^2\left(2-\sqrt{3}\right) = S_{MNKL}.$$

Таким образом, площадь искомой части равна

$$4\cdot S_{MPN} + S_{MNKL} = a^2\cdot\frac{\pi+3-3\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $a^2\cdot\dfrac{\pi+3-3\sqrt{3}}{3}$.

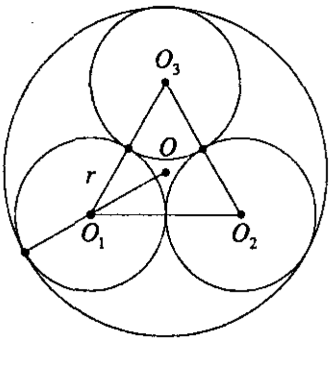


Рис.10.30

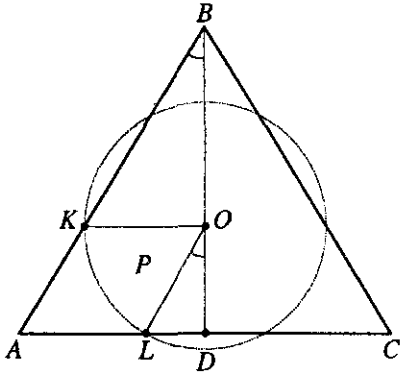


Рис.10.31

10.396. В окружность радиуса R вписаны три равные окружности, касающиеся внешней окружности и попарно друг друга. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими тремя окружностями. (рис. 10.30)

Решение.

Если O_1, O_2, O_3 — центры данных трех попарно касающихся окружностей радиуса r, вписанных в данную окружность радиуса R с центром O, то O совпадает с центром правильного $\Delta O_1O_2O_3$ со стороной $2r$, причем $OO_1 = R - r$ (прямая OO_1 проходит через точку касания окружностей O и O_1).

Таким образом,

$$2r = O_1O_2 = \sqrt{3}\cdot OO_1 = \sqrt{3}(R-r) \Rightarrow r = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)R.$$

Площадь фигуры Ф, ограниченной окружностями O_1, O_2, O_3, равна $S_{\Delta O_1O_2O_3}$ без площадей трех равных секторов 60° и радиуса r, т.е.

$$S_\Phi = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\frac{\pi r^2}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}R^2\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{3}-3\pi\right)$.

10.397. В окружность радиуса R вписаны шесть равных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими шестью окружностями.

Решение.

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 — центры данных шести окружностей радиуса r, каждая из которых касается двух соседних и вписанных в данную окружность радиуса R с центром O. Тогда O совпадает с центром правильного шестиугольника K с вершинами O_i, $i=\overline{1, 6}$, и стороной $2r$, причем $OO_i = R - r$ (прямая OO_i проходит через точку касания окружностей O и O_i). Имеем

$$2r = O_1O_2 = OO_1 = OO_2 = R - r \Rightarrow r = R/3.$$

Площадь фигуры Ф, ограниченной окружностями O_i, $i=\overline{1, 6}$, равна площади K без площади шести равных секторов в 120° и радиуса r, т. е.

$$S = 6S_{\Delta O_1O_2O} - 6\cdot\frac{\pi r^2}{3} = 6\cdot\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} - 2\pi r^2 = \frac{2}{9}R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right).$$

Ответ: $2R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/9$.

10.398. В окружность радиуса R вписаны четыре равные окружности, каждая из которых касается данной и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими четырьмя окружностями.

Решение.

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, — центры данных четырех окружностей радиуса r, каждая из которых касается двух соседних и вписанных в окружность радиуса R с центром O. Тогда O совпадает с центром квадрата O_1, O_2, O_3, O_4 со стороной $2r$, причем $PO_1 = R - r$ (прямая OO_l проходит через точку касания окружностей O и O_l). Имеем

$$2r = O_1O_2 = OO_1\cdot\sqrt{2} = (R-r)\sqrt{2} \Rightarrow r = R\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Площадь фигуры Ф, ограниченной окружностями O_i, $i = 1, 2, 3, 4$, равна площади квадрата $O_1O_2O_3O_4$ без площадей четырех секторов в 90° и радиуса r, т. е.

$$S_{\Phi} = 4r^2 - 4\frac{\pi r^2}{4} = R^2(4-\pi)\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $R^2(4-\pi)\left(3-2\sqrt{2}\right)$.

10.399. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра описана окружность радиуса $a/3$. Определить площадь части треугольника, лежащей вне окружности. (рис.10.31)

Решение.

Если O — центр данного правильного ΔABC, K и L — точки пересече-

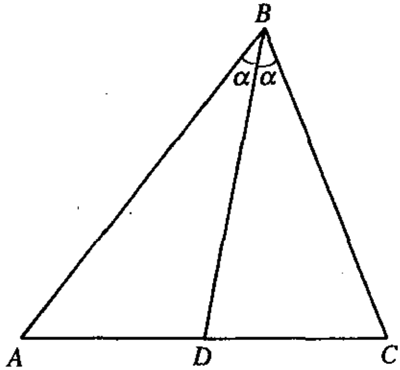


Рис.10.32

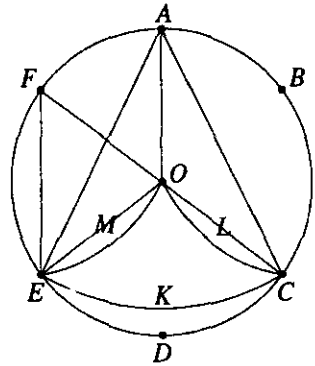


Рис. 10.33

ния окружности, имеющей центр O и радиус $a/3$, со сторонами AB и AC и BD — высота ΔABC, то

$$\cos\angle LOD=\frac{OD}{OL}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\left(OD=\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)\Rightarrow\angle LOD=30^\circ,$$

$OL \parallel AB$. Аналогично,

$$OK \parallel AC \Rightarrow AKOL\text{ — ромб и } S_{AKOL}=\frac{a^2}{9}\sin 60^\circ,$$

$$S_{OLPK}=\frac{\pi}{6}\cdot OL^2=\frac{\pi a^2}{54}\Rightarrow S_{AKPL}=\frac{a^2\sqrt{3}}{18}-\frac{\pi a^2}{54}=\frac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{54}.$$

Тогда площадь части ΔABC, лежащей вне окружности O, равна

$$S_{AKPL}=\frac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{18}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{18}$.

10.400. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и биссектрисе l угла между ними. (рис. 10.32)

Решение.

Если BD — биссектриса данного ΔABC, $a = AB$, $b = BC$, $l = BD$, $\angle B = 2a$, то по теореме косинусов для ΔABD и ΔDBC получаем:

$$\begin{cases} AD^2 = a^2 + l^2 - 2a \cdot l\cos\alpha \\ DC^2 = b^2 + l^2 - 2b \cdot l\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{a^2 + l^2 - 2a \cdot l\cos\alpha}{b^2 + l^2 - 2b \cdot l\cos\alpha} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{l(a+b)}{2ab},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{2ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot l\sin\alpha}{2} + \frac{b \cdot l\sin\alpha}{2} = \frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}.$$

Ответ: $\frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}$.

10.401. Найти радиус круга, если площадь круга на Q кв. ед. больше площади вписанного в него правильного двенадцатиугольника.

Решение.

Правильный двенадцатиугольник, вписанный в данный круг радиуса R, состоит из 12 одинаковых равнобедренных треугольников с боковыми сторонами R и углом $30°$ при вершине. Таким образом, получаем

$$Q = \pi R^2 - \frac{12R^2 \sin 30°}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{Q}{\pi - 3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{Q}{\pi - 3}}$.

10.402. Окружность радиуса R с центром в точке O разделена точками A, B, C, D, E, F на шесть равных частей. Определить площадь фигуры COE, ограниченной дугой OC с центром в точке B, дугой OE с центром в точке F и дугой CE с центром в точке A. (рис. 10.33)

Решение.

Площадь искомой фигуры Ф, ограниченной

$\cup OME$, $\cup OLC$, $\cup EKC$, равна

$S_{ACKE} - 2S_{AOE} - 2S_{OME}$ (OME — сегмент сектора $FOME$).

$$S_{AOE} = \frac{1}{2} OA \cdot OE \cdot \sin 120° = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{OME} = S_{FOME} - S_{FOE} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$(OF = OE = EF = R)$.

$$S_{ACKE} = \frac{\pi R^2}{2} \left(AE = AC = R\sqrt{3},\ \angle EAC = 60°\right) \Rightarrow S_{\Phi} = \frac{\pi R^2}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^2}{6}$.

10.403. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 0,6 и 0,8 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. (рис.10.34)

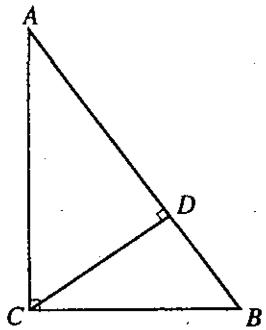


Рис. 10.34

Решение.

Пусть r, r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных в ΔABC, ΔACD, ΔBCD соответственно.

$$\Delta ACD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{0,6}{0,8}$$

(радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники, пропорциональны соответствующим сторонам)$\Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{4}{3}AC,$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{5}{3}AC.$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow r = 1.$$

Ответ: 1 см.

10.404. Площадь треугольника ABC равна S_1; площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения высот, равна S_2. На прямой CO взята такая точка K, что треугольник ABK — прямоугольный. Доказать, что площадь треугольника ABK есть среднее геометрическое между S_1 и S_2. (рис. 10.35)

Решение.

Пусть CD — высота данного ΔABC.

$\Delta BCD \sim \Delta ADO$

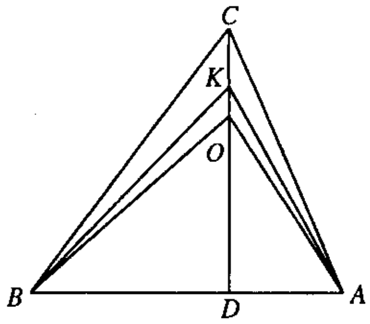


Рис. 10.35

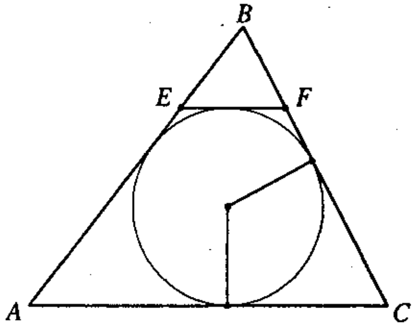


Рис.10.36

$$(\angle BCD = \angle BAO = 90^\circ - \angle B) \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{OD}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD \cdot OD = AD \cdot BD = KD^2 \Rightarrow \frac{CD \cdot AB}{2} \cdot \frac{OD \cdot AB}{2} = \left(\frac{KD \cdot AB}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_1 \cdot S_2 = S^2_{ABK}$, что и требовалось доказать.

10.405. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок ее внутри треугольника равен b. Найти площадь треугольника, отсеченного этой касательной от данного. (рис. 10.36)

Решение.

Пусть EF — касательная к окружности, вписанной в данный правильный ΔABC, $EF = b$, $x = BE$, $y = BF$.

$$AE + CF = EF + AC = a + b \Rightarrow x + y = (a - AE) + (a - CF) = a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = (a - b)^2.$$

По теореме косинусов для ΔBEF,

$$b^2 = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow (x + y)^2 = b^2 + 3xy = (a - b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{BEF} = \frac{xy \sin 60^\circ}{2} = \frac{\left((a-b)^2 - b^2\right)\sqrt{3}}{12} = \frac{a(a - 2b)\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $\frac{a(a-2b)\sqrt{3}}{12}$.

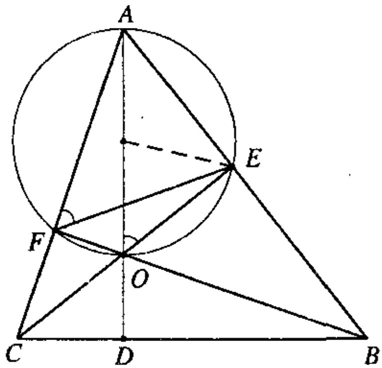


Рис.10.37

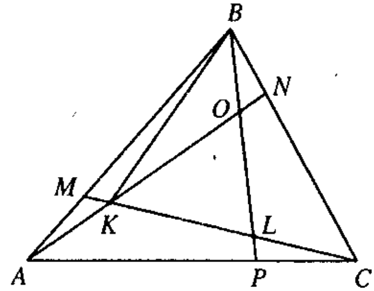


Рис. 10.38

10.406. Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами другого треугольника, периметр которого равен $2p$. Найти площадь треугольника ABC, если радиус описанной около него окружности равен R. (рис. 10.37)

Решение.

Если $AD = h_a$, $BF = h_b$,

$CE = h_c$ — высоты данного ΔABC, пересекающиеся в точке O, то

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = \frac{BC \cdot OD}{2} + \frac{AC \cdot OF}{2} + \frac{AB \cdot OE}{2} =$$

$$= BC \cdot \frac{h_a - AO}{2} + AC \cdot \frac{h_b - BO}{2} + AB \cdot \frac{h_c - CO}{2} =$$

$$= 3S_{ABC} - \left(\frac{AO \cdot BC}{2} + \frac{BO \cdot AC}{2} + \frac{CO \cdot AB}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC} = \frac{AO \cdot BC}{2} + \frac{BO \cdot AC}{2} + \frac{CO \cdot AB}{2}.$$

Около четырехугольника $AEOF$ опишем окружность, тогда AO — ее диаметр, $\angle AFE = \angle AOE$, $\angle AOE = 90° - \angle OAE = \angle B \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = \angle B \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{FE}{BC} = \dfrac{AO}{2R}$ (стороны подобных треугольников пропорциональны диаметрам описанных кругов)$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} AO \cdot BC = R \cdot FE$. Аналогично, $\frac{1}{2} BO \cdot AC = R \cdot DE$,

$\frac{1}{2} CO \cdot AB = R \cdot DF \Rightarrow 2S_{ABC} = R(FE + DE + DF) = 2R \cdot p$.

Ответ: $R \cdot p$.

10.407. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $AM:MB = BN:NC = CP:PA = 1:4$. Найти отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN, BP и CM, к площади треугольника ABC. (рис. 10.38)

Решение.

Если $x = S_{AMK}$, то

$S_{BMK} = 4x$,
$S_{ABK} = 5x$,
$S_{ANC} = 4S_{ANB}$,
$S_{KNC} = 4S_{KNB} \Rightarrow S_{ANC} - S_{KNC} = S_{AKC} = 4(S_{ANB} - S_{KNB}) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AKC} = 4S_{ABK} = 20x \Rightarrow S_{AMC} = 21x$, $S_{BCM} = 4S_{AMC} = 84x \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = 105x$, т. е. $\frac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \frac{1}{105}$.

Аналогично, $S_{BNO} = S_{CPL} = \frac{1}{105} S_{ABC} = x$.

Таким образом, $S_{AKLP} = S_{BOKM} = S_{CLON} = 20x - x = 19x \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{KOL} = S_{ABC} - 3(S_{AKLP} + S_{AMK}) = 105x - 3 \cdot 20x = 45x$,

$S_{KOL} : S_{ABC} = 3 : 7$.

Ответ: 3/7.

10.408. Около окружности радиуса 5 см описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания ее боковых сторон равно 8 см. Найти площадь трапеции. (рис .10.39)

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса 5, около которой описана равнобедренная трапеция $ABCD$, E, L, F, K — точки ее касания с окружностью. Тогда

$BF = BE = CE = CL \Rightarrow FL \parallel BC \Rightarrow FL \perp EK \Rightarrow$

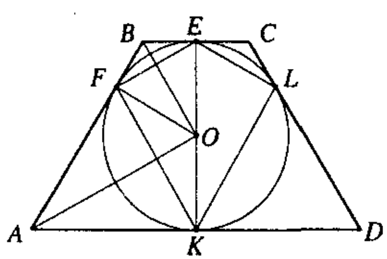


Рис.10.39

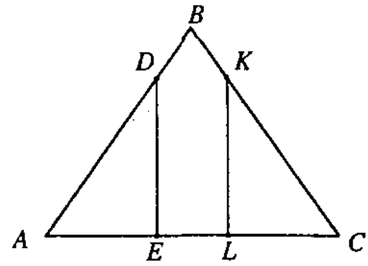


Рис. 10.40

$$\Rightarrow S_{FELK} = \frac{FL \cdot EK}{2} = 40, \ S_{FEK} = \frac{S_{FEKL}}{2} = 20.$$

$\angle BAO = \angle OAK = \angle FKO$, так как $FK \perp AO$ (AO — биссектриса, поэтому и высота равнобедренного ΔAFK). Далее, $\angle EFK = 90°$, так как он опирается на диаметр EK. $\angle AOB = 90°$, следовательно $\Delta FEK \sim \Delta AOB$

$$\Rightarrow S_{AOB} = 20\left(\frac{AB}{EK}\right)^2 = \frac{AB \cdot OF}{2} \Rightarrow AB = \frac{25}{2} \ (OF = 5,$$

$$EK = 10) \Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{BC + AD}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 10 \cdot \frac{BC + AD}{2} = 125.$$

Ответ: 125 см².

10.409. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 разделен на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными большей стороне. Найти расстояния до этих прямых от ближайших к ним вершин треугольника, находящихся на большей стороне. (рис. 10.40)

Решение.

Пусть в данном ΔABC $AC = 15$, $BC = 14$, $AB = 13$, $DE \perp AC$, $KL \perp AC$, $S_{ADE} = S_{BKLED} = S_{KCL}$, тогда по теореме косинусов для ΔABC,

$$\cos\angle A = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65}, \ \operatorname{tg}\angle A = \frac{56}{33},$$

$$\cos\angle C = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}, \ \sin\angle C = \frac{4}{5}, \ \operatorname{tg}\angle C = \frac{4}{3};$$

$S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} \cdot \sin\angle C = 84$, $S_{KCL} = 28$ (по условию), а с другой стороны, $S_{KCL}=\dfrac{KL\cdot LC}{2}=\dfrac{(LC)^2\operatorname{tg}\angle C}{2}\Rightarrow LC=\sqrt{42}$. Аналогично,

$$S_{ADE}=28=\frac{(AE)^2\operatorname{tg}\angle A}{2}\Rightarrow AE=\sqrt{33}.$$

Ответ: $\sqrt{33}$, $\sqrt{42}$.

10.410. В трапецию, у которой меньшее основание равно a, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки длиной m и n, считая от большего основания. Определить площадь трапеции. (рис. 10.41)

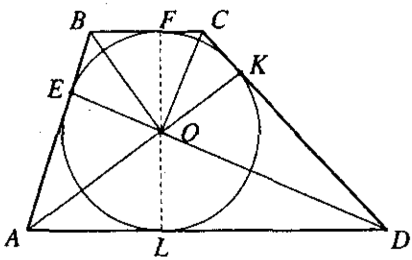


Рис. 10.41

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса r, вписанной в данную трапецию $ABCD$. E, F, K, L — точки касания трапеции с окружностью,

$BC=a,\ \ AM=m,\ \ BM=n.\ \ \angle AOB=\angle COD=90^\circ\Rightarrow$

$\Rightarrow r^2=OE^2=BE\cdot AE=m\cdot n=CK\cdot DK$. Далее, имеем

$n=BE=BF,\ m=AE=AL\Rightarrow CK=CF=a-n,$

$DK=DL=AD-m\Rightarrow m\cdot n=(a-n)(AD-m)\Rightarrow AD=\dfrac{a\cdot m}{a-n},$

$$S_{ABCD}=2r\cdot\frac{BC+AD}{2}=\frac{\sqrt{m\cdot n}\cdot\left(a^2-a\cdot n+a\cdot m\right)}{a-n}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{m\cdot n}\cdot(a-n+m)}{a-n}$.

10.411. Даны два правильных треугольника площадью S, из которых второй получен при повороте первого треугольника вокруг его центра на угол 30°. Вычислить площадь пересечения этих треугольников. (рис. 10.42)

Решение.

Рассмотрим правильные ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, имеющие общий центр O, где $\Delta A_1B_1C_1$ получен поворотом вокруг O ΔABC на 30°. Пусть D и E — точки пересечения A_1B_1 с AB и BC. Пусть $a=AB$, тогда

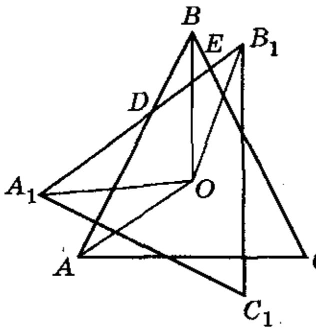


Рис. 10.42

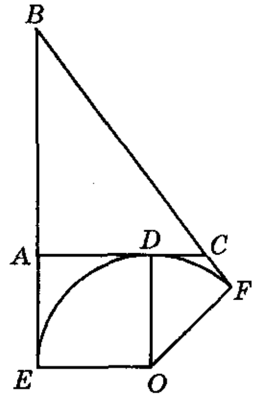


Рис. 10.43

$\angle DBO = \angle BOB_1 = 30°$ (по условию) $\Rightarrow AB \| OB_1$;

$\angle DA_1O = \angle AOA_1 = 30° \Rightarrow A_1B_1 \| AO$. Таким образом, ADB_1O — параллелограмм, причем $A_1B_1 \perp BC$, так как $AO \perp BC \Rightarrow \Delta BED$ прямоугольный, $BD = AB - AD = AB - OB_1 = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{BED} = \frac{BD \cdot BE \cdot \sin 30°}{2} = \frac{BD^2 \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°}{2} = \frac{a^2(\sqrt{3}-1)^2\sqrt{3}}{24} =$$

$$= \frac{S(\sqrt{3}-1)^2}{6}, \text{ где } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ — площадь } \Delta ABC.$$

Так как площадь фигуры Ф, являющейся пересечением ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, равна S_{ABC} без площади трех треугольников, равных ΔBED, то $S_{\Phi} = S - 3S_{BED} = S(\sqrt{3}-1)$.

Ответ: $S(\sqrt{3}-1)$.

10.412. Площадь прямоугольного треугольника равна $2r^2/3$, где r — радиус окружности, касающейся одного катета и продолжений другого катета и гипотенузы. Найти стороны треугольника (рис. 10.43).

Решение.

Пусть окружность с центром O и радиусом r касается катета AC и продолжений катета AB и гипотенузы BC данного ΔABC в точках D, E, F соответственно.

Если $AB = x$, $AC = y$, то $AE = AD = r$ ($ADOE$ — квадрат),

$$CF = DC = y - r, BF = BE = x + r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + r = BC + CF = BC + y - r \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + y^2} = 2r + x - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (2r + x - y)^2, \\ \dfrac{xy}{2} = \dfrac{2r^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{r}{3}, \\ xy = \dfrac{4r^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}r, \\ x = r. \end{cases}$$

Ответ: $r, \frac{4}{3}r, \frac{5}{3}r.$

10.413. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Доказать, что если площади двух из них, прилежащих к основаниям трапеции, равны p^2 и q^2, то площадь трапеции равна $(p + q)^2$. (рис. 10.44)

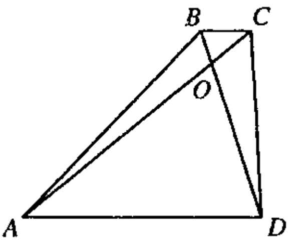


Рис. 10.44

Решение.

Рассмотрим трапецию $ABCD$, тогда $S_{OBC} = p^2$, $S_{AOD} = q^2$,

$$\Delta OBC \sim \Delta AOD \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BO}{OD} = \frac{p}{q} \Rightarrow S_{ABO} = p \cdot q.$$

Аналогично получаем, что

$$S_{COD} = p \cdot q \Rightarrow S_{ABCD} = p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2,$$

что и требовалось доказать.

10.414. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части. (рис. 10.45)

Решение.

Пусть O — середина диагонали BD, $EO \parallel AC$. Продолжим AD до точки F так, что $FE = ED$. Тогда имеем. $S_{CED} = S_{CEF}$ и OE — средняя линия ΔFBD, следовательно $OE \parallel BF \parallel AC \Rightarrow S_{AFC} = S_{ABC}$ (треугольники с общим основанием AC и равными высотами) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{CEF} = S_{ACE} + S_{AFC} = S_{ACE} + S_{ABC} = S_{ABCE} \Rightarrow S_{ABCE} = S_{CDE},$$

что и требовалось доказать.

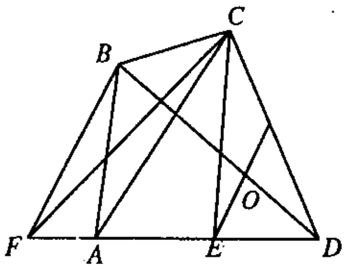


Рис.10.45

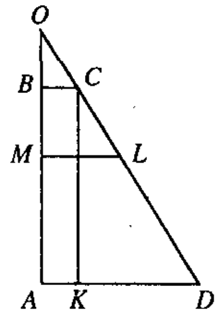


Рис.10.46

10.415. Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$. (рис. 10.46)

Решение.

Рассмотрим данную прямоугольную трапецию $ABCD$, где $c = AB$, $d = CD$, $MN \parallel BC$ и в $MBCL$ и $AMLD$ можно вписать окружности радиусов r_1 и r_2. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O.

Пусть $BC = x$, $MN = y$, $AD = z$.

$\Delta MOL \sim \Delta AOD$.

Тогда $\frac{y}{z} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{OM}{OA}$ (в подобных треугольниках радиусы вписанных кругов относятся как соответствующие стороны). Далее

$$BM = 2r_1,\ AM = 2r_2 \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{OM}{OA} = \frac{OM - BM}{OA - AM}$, т.е. $\frac{y}{z} = \frac{OB}{OM}$. Так как $\frac{OB}{OM} = \frac{x}{y}$

$(\Delta BOC \sim \Delta MOL)$, то $\frac{y}{z} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = xz$.

Имеем $BM + CL = x + y$, $AM + DL = y + z \Rightarrow$

$$\Rightarrow c + d = x + 2y + z = x + 2\sqrt{xz} + z = \left(\sqrt{x} + \sqrt{z}\right)^2,\ \sqrt{x} + \sqrt{z} = \sqrt{c + d}.$$

Пусть CK — высота трапеции, тогда $z - x = KD = \sqrt{d^2 - c^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{z}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{d^2-c^2}}{\sqrt{c+d}}=\sqrt{d-c}\Rightarrow \sqrt{z}=\frac{\sqrt{d+c}+\sqrt{d-c}}{2},$$

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{d+c}+\sqrt{d-c}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\left(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c}\right)^2}{4}$.

10.416. Определить площадь треугольника по его трем высотам h_1, h_2, h_3.

Решение.

Если a, b, c — стороны данного треугольника, к которым проведены высоты h_1, h_2, h_3, соответственно, то

$a=\frac{2S}{h_1}$, $b=\frac{2S}{h_2}$, $c=\frac{2S}{h_3}$, где S — площадь данного треугольника и по формуле Герона получаем

$$S=\sqrt{\left(\frac{S}{h_1}+\frac{S}{h_2}+\frac{S}{h_3}\right)\left(\frac{S}{h_1}+\frac{S}{h_2}-\frac{S}{h_3}\right)\left(\frac{S}{h_1}+\frac{S}{h_3}-\frac{S}{h_2}\right)\left(\frac{S}{h_2}+\frac{S}{h_3}-\frac{S}{h_1}\right)}.$$

Из этой формулы следует

Ответ: $S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)}}$.

10.417. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$) вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $AC=$ 4 см, $BC=3$ см. (рис. 10.47)

Решение.

Если O — центр окружности радиуса r, вписанной в данный ΔABC, то

$$AB=5,\ r=\frac{3+4-5}{2}=1,$$

$$S_{A_1B_1C_1}=S_{OA_1B_1}+S_{OA_1C_1}+S_{OB_1B_1}=\frac{1}{2}r^2\sin\angle A_1OB_1+\frac{1}{2}r^2\sin\angle A_1OC_1+$$

$$+\frac{1}{2}r^2\sin\angle C_1OB_1=\frac{r^2}{2}(\sin\angle C+\sin\angle A+\sin\angle B)=$$

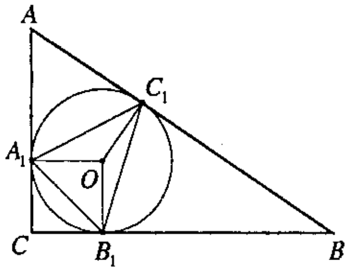


Рис.10.47

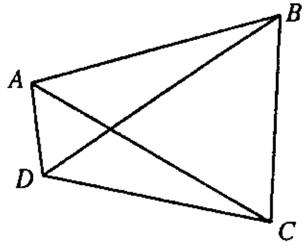


Рис. 10.48

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=5.$$

Ответ: 5.

10.418. В окружность вписан четырехугольник, длины сторон которого равны a, b, c и d. Вычислить отношение длин диагоналей этого четырехугольника. (рис. 10.48)

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, который можно вписать в окружность радиуса r,

$$a=AB, b=BC, c=CD, d=AD,\ \alpha=\angle ADC,\ \beta=\angle BCD.$$

По теореме синусов, $AC=2r\sin\alpha$, $BD=2r\sin\beta\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{AC}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\ S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{ab\sin(180^\circ-\alpha)}{2}+\frac{cd\sin\alpha}{2}$$

$(\angle B+\angle D=180^\circ)$. Аналогично,

$S_{ABCD}=S_{BCD}+S_{ABD}=\dfrac{bc\sin\beta}{2}+\dfrac{ad\sin(180^\circ-\beta)}{2}$. Окончательно имеем: $(ab+cd)\sin\alpha=(bc+ad)\sin\beta\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{bc+ad}{ab+cd}$.

Ответ: $\dfrac{bc+ad}{ab+cd}$.

10.419. Круг с центром на стороне AB треугольника ABC касается двух других его сторон. Найти площадь круга, если $a=13$ см, $b=14$ см, $c=15$ см, где a, b и c — длины сторон треугольника. (рис. 10.49)

Решение.

Пусть O — центр круга радиуса r, касающегося сторон AC и BC данного ΔABC в точках E и D. По теореме косинусов, получаем

$$\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5}{13},$$

$$\sin\angle C = \frac{12}{13} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{ab\sin\angle C}{2} = 84.$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{r\cdot b}{2} + \frac{r\cdot a}{2} =$$

$$= r\cdot\frac{27}{2} \Rightarrow r = \frac{56}{9},\ \pi r^2 = \frac{3136}{81}\pi.$$

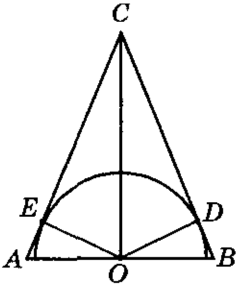


Рис. 10.49

Ответ: $\frac{3136}{81}\pi$ см^2.

10.420. В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет 1/6 часть площади треугольника. Определить высоту треугольника и сторону квадрата (рис. 10.50).

Решение.

Если $MEDL$ — квадрат со стороной x, вписанный в данный ΔABC с высотой $h = BK$, $a = AC$, то имеем

$$\Delta AEM \sim \Delta ABK \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{x}{h};$$

$$\Delta EBD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{x}{a}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{x}{h} + \frac{x}{a} = \frac{AE}{AB} + \frac{EB}{AB} = 1 \Rightarrow xa + xh = ah.$$

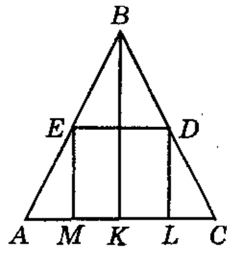


Рис. 10.50

По условию,

$$ah = 12x^2 \Rightarrow \begin{cases} ah = 12x^2, \\ a+h = 12x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{6}}{6}a,\ h = (5\pm 2\sqrt{6})a.$$

Ответ: $\frac{3+\sqrt{6}}{6}a$, $(5+2\sqrt{6})a$ или $\frac{3-\sqrt{6}}{6}a$, $(5-2\sqrt{6})a$.

10.421. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен основанию. Доказать, что и биссектриса равна основанию.

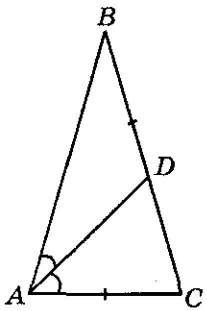


Рис. 10.51

Решение.

По условию, $AB = BC$, AD — биссектриса, $BD = AC$ (рис. 10.51). Имеем $AB = BD + DC$. Тогда, используя формулу $l_c = \sqrt{ab - a_1b_1}$, получим

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC} = \sqrt{(BD + DC)AC - BD \cdot DC} =$$

$= \sqrt{AC^2 + DC \cdot AC - AC \cdot DC} = AC$, что и требовалось доказать.

10.422. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла отсекает на гипотенузе отрезки длиной a и b. Найти площадь квадрата, стороной которого является эта биссектриса (рис. 10.52).

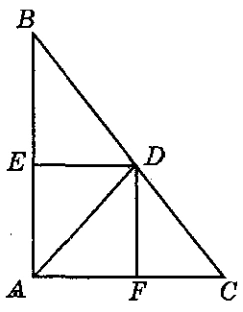


Рис. 10.52

Решение.

Пусть AD — биссектриса прямого угла данного ΔABC, $BD = a, DC = b$.

Проведем перпендикуляры DE и DF на катеты AB и AC. Тогда $AEDF$ квадрат со стороной z.

Пусть $BE = x, FC = y$.

$$\Delta BDE \sim \Delta DCF \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{a}{b}, \frac{z}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2}z^2, y^2 = \frac{b^2}{a^2}z^2.$$

По теореме Пифагора для ΔBDE, ΔDCF имеем:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2) + 2z^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow z^2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\right) =$$

$$= a^2 + b^2 \Rightarrow z^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow AD^2 = 2z^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Ответ: $\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

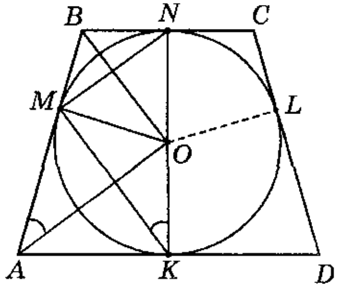


Рис. 10.53

10.423. Около окружности радиуса $R = 1$ см описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2 (рис. 10.53). Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Решение.

Если O — центр круга, вокруг которого описана данная равнобедренная трапеция $ABCD$, а K, L, M, N — точки ее касания с кругом, то $\angle BAO = \angle OAK = \angle MKO$, так как $MK \perp AO$ (AO — биссектриса и, следовательно, высота равнобедренного ΔAMK).

Далее, $\angle NMK = 90°$, так как NK — диаметр,

$$\angle AOB = 90° \Rightarrow \Delta MNK \sim \Delta AOB \Rightarrow \left(\frac{AB}{NK}\right)^2 = \frac{S_{AOB}}{S_{MNK}}.$$

Так как $NK = 2R = 2$ (по условию), то

$$AB = \frac{AD+BC}{2} = \frac{S_{ABCD}}{NK} = \frac{5}{2},\ S_{AOB} = \frac{AB \cdot OM}{2} = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, $S_{MNK} = 0{,}8$, $S_{MNLK} = 2S_{MNK} = 1{,}6$.

Ответ: 1,6 см^2.

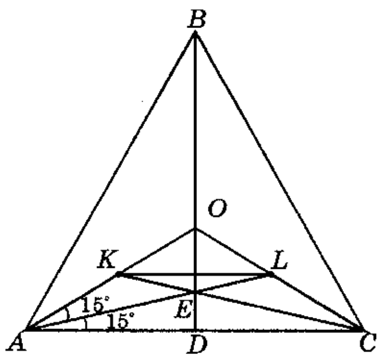


Рис. 10.54

10.424. Из каждой вершины основания равностороннего треугольника со стороной a проведены два луча, образующих с этим основанием углы 15° и 30°. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения построенных лучей (рис. 10.54).

Решение.

Если O — центр данного равностороннего ΔABC, то AO и CO — два заданных луча, образующих с AC углы 30°. Пусть два других луча AL и CK, образующие углы 15° с AC, пересекаются в точке E (L и K — точки пересечения их с CO и AO). $\Delta AKC = \Delta ALC$, поэтому их высоты равны, т.е. K и L равноудалены от $AC \Rightarrow KL \| AC$. Если D — середина AC, то ED и OD —

высоты ΔAEC и ΔAOC соответственно. Таким образом, O, E, D лежат на одной прямой и $OE \perp KL$.

$\angle LAC = \angle KLA = \angle KAL = 15° \Rightarrow AK = KL$. Отсюда

$$\frac{OE}{ED} = \frac{AO}{AD} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{AK}{KO} = \frac{AC}{CO} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{OE}{OD - OE} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{KL}{AO - KL} = \sqrt{3} \Rightarrow OE = \frac{a(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{3},$$

$$KL = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}\left(OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}, OD = \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{OLEK} = \frac{KL \cdot OE}{2} = \frac{a^2(9-5\sqrt{3})}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^2(9-5\sqrt{3})}{12}$.

10.425. Через точку M, расположенную на диаметре окружности радиуса 4 см, проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 30°. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная данному диаметру (рис.10.55). Найти площадь треугольника ABC, если $AM : MB = 2 : 3$.

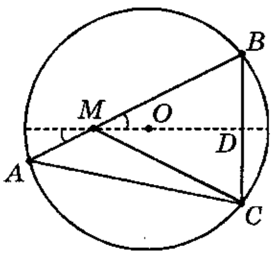


Рис. 10.55

Решение.

Проведем $MD \perp BC$, тогда по условию отрезок MD лежит на диаметре данной окружности, следовательно, делит хорду BC пополам $\Rightarrow$ $\Rightarrow MB = BC \Rightarrow \angle BMC = 60°$ (по условию, $\angle BMD = 30°) \Rightarrow \Delta MBC$ правильный. Пусть $MB = 3x$, тогда $BC = 3x$, $AM = 2x$ (по условию).

По теореме синусов $AC = 2 \cdot 4 \sin \angle B = 4\sqrt{3}$.

По теореме косинусов $AC^2 = 48 = (5x)^2 + (3x)^2 - 30x^2 \cos 60° \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{48}{19}, S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60° = \frac{15x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{180\sqrt{3}}{19}.$$

Ответ: $\frac{180\sqrt{3}}{19}$ см^2.

Глава 11

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольная призма (l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{\text{сеч}}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{\text{сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l; \qquad (11.1)$$

$$V = SH; \qquad (11.2)$$

$$V = S_{\text{сеч}} l. \qquad (11.3)$$

2. Прямая призма:

$$S_{\text{бок}} = Pl. \qquad (11.4)$$

3. Прямоугольный параллелепипед (a, b, c — его измерения; d — диагональ):

$$S_{\text{бок}} = PH; \qquad (11.5)$$

$$V = abc; \qquad (11.6)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \qquad (11.7)$$

4. Куб (a — ребро):

$$V = a^3; \qquad (11.8)$$

$$d = a\sqrt{3}. \qquad (11.9)$$

5. Произвольная пирамида (S — площадь основания; H — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3} SH. \qquad (11.10)$$

6. Правильная пирамида (P — периметр основания; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2} Pl \; ; \tag{11.11}$$

$$V = \frac{1}{3} SH \; . \tag{11.12}$$

7. Произвольная усеченная пирамида (S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2} \right). \tag{11.13}$$

8. Правильная усеченная пирамида (P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l \; . \tag{11.14}$$

9. Цилиндр (R — радиус основания; H — высота; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = 2\pi RH \; ; \tag{11.15}$$

$$V = \pi R^2 H \; . \tag{11.16}$$

10. Конус (R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = \pi Rl \; ; \tag{11.17}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H \; . \tag{11.18}$$

11. Шар, сфера (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности; V — объем):

$$S = 4\pi R^2 \; ; \tag{11.19}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \; . \tag{11.20}$$

12. Шаровой сегмент (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента; V — объем):

$$S = 2\pi Rh\,; \tag{11.21}$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \tag{11.22}$$

13. Шаровой сектор (R — радиус шара; h — высота сегмента; V — объем):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h\,. \tag{11.23}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий: а) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; б) длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

2. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих условий: а) все боковые грани образуют с основанием равные углы; б) длины всех апофем боковых граней равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

3. Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 (рис. 11.1), то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.

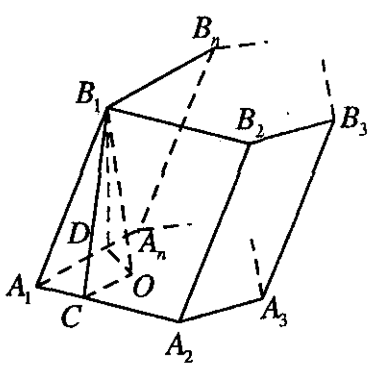


Рис. 11.1

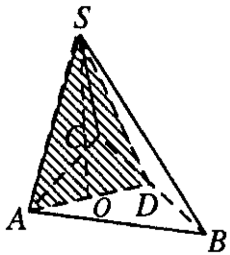


Рис. 11.2

Это же утверждение можно сформулировать так: если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.

4. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны. Справедливо и обратное утверждение.

5. Если SO — высота пирамиды $SABC$ и $SA \perp BC$, то площадь $SAO \perp BC$ (рис. 11.2)

Доказательство указанных дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

11.196. Два равных куба с ребром a имеют общий отрезок AB, концами которого являются середины двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани. Один из кубов получен поворотом другого вокруг прямой AB на 90°. Найти объем общей части этих кубов.

Решение.

Пусть один из кубов стоит на горизонтальной плоскости, а общий отрезок соединяет середины его противоположных вертикальных ре-

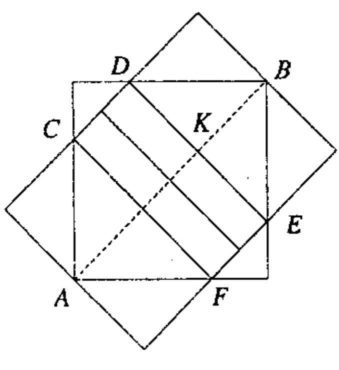


Рис. 11.3,а

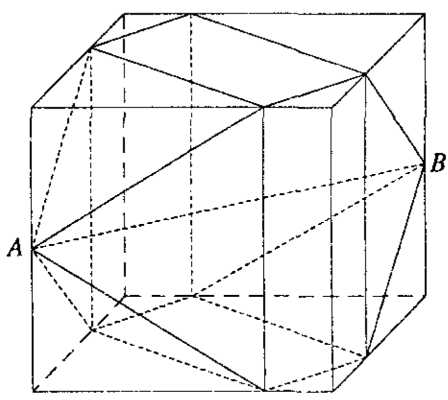


Рис. 11.3,б

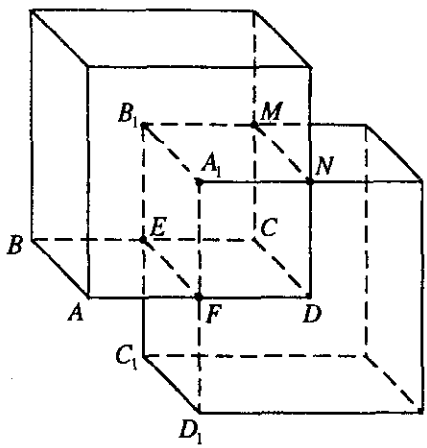


Рис. 11.4

бер. Рассмотрим вид сверху (рис. 11.3,а). Общую часть двух кубов составляет фигура $ACDBEF$, $CDEF$ — грань параллелепипеда, а BED — проекция грани пирамиды (рис. 11.3,б). Основание пирамиды — вертикальная грань параллелепипеда, площадь которой равна $DE \cdot a$. Так как

$DE = a$, $BK = \frac{a}{2}$, то общий объем двух пирамид $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{3}$.

Объем параллелепипеда $V_2 = a \cdot CD$, где

$$CD = AB - a = a\sqrt{2} - a = a\left(\sqrt{2} - 1\right), \text{ т.е. } V_2 = a^3\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Отсюда, объем общей части $V_1 + V_2 = a^3\left(\frac{1}{3} + \sqrt{2} - 1\right) = \frac{\left(3\sqrt{2} - 2\right)a^3}{3}$.

Ответ: $\frac{a^3\left(3\sqrt{2} - 2\right)}{3}$.

11.197. Найти объем общей части двух кубов, если один из них получен при повороте на 90° другого куба вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Ребро куба равно a.

Решение.

Если EF — средняя линия грани $ABCD$ первого куба, из которого второй куб получен поворотом на 90° вокруг FE по часовой стрелке (если смотреть от F к E), то грань $ABCD$ перейдет в грань $A_1B_1C_1D_1$

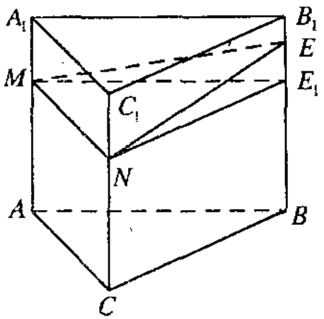


Рис. 11.5

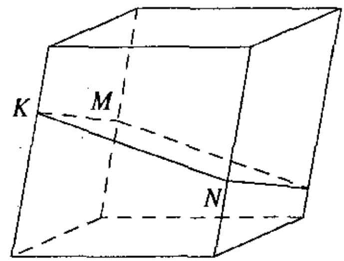


Рис. 11.6

(рис. 11.4). Ясно, что объем общей части $A_1B_1EFNMCD$ двух данных кубов равен 1/4 их объема, т.е. $\dfrac{a^3}{4}$ (M и N — точки пересечения ребер кубов).

Ответ: $\dfrac{a^3}{4}$.

11.198. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см. Некоторое плоское сечение этой призмы отсекает от боковых ребер, проходящих через вершины большего и среднего углов основания, отрезки, равные 12 см каждый, а от ребра, проходящего через вершину меньшего угла основания — отрезок в 18 см. Найти объем и площадь полной поверхности фигуры, ограниченной плоскостью основания призмы, плоскостями боковых граней и плоскостью сечения.

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная прямая призма с основанием ABC, $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$. EMN — данное сечение, $AM = CN = 12$, $BL = 18$. (рис. 11.5) Тогда по условию, $AB^2 = 100 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \angle C$ — прямой.

Если сечение $ME_1N \parallel ABC$, то $EE_1 = 6$ и

$$V_{ABCMEN} = V_{ABCME_1N} + V_{MENE_1} = 12S_{ABC} + 2S_{ME_1N} = 336.$$

$MN \perp NE_1 \Rightarrow MN \perp NE \Rightarrow$ угол $\alpha = \angle ENE_1$ равен углу, образованному плоскостями MNE и MNE_1, ΔMNE_1 — проекция $\Delta MNE \Rightarrow$

$S_{MNE} = \dfrac{S_{MNE_1}}{\cos\alpha}$. Так как $tg\alpha = \dfrac{3}{4}$, то $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, и площадь полной поверхности фигуры $ABCMEN$ равна

$$S_{ABC}+S_{MNE}+AM\cdot AC+BC\cdot\frac{CN+BE}{2}+AB\cdot\frac{AM+BE}{2}=396.$$

Ответ: 336 см^3, 396 см^2.

11.199. Ребро наклонного параллелепипеда равно l. К нему примыкают две смежные грани, у которых площади равны m^2 и n^2, а их плоскости образуют угол 30°. Вычислить объем параллелепипеда.

Решение.

Проведем плоскость, перпендикулярную ребру (рис. 11.6), и найдем стороны параллелограмма, полученного в сечении. Имеем

$$KM=\frac{m^2}{l},\ KN=\frac{n^2}{l},\ \text{откуда}\ S_c=\frac{m^2}{l}\cdot\frac{n^2}{l}\sin 30^\circ=\frac{m^2n^2}{2l^2}.$$

Отсюда $V=S_c l=\dfrac{m^2n^2}{2l}$.

Ответ: $\dfrac{m^2n^2}{2l}$.

11.200. Через точку, делящую ребро правильного тетраэдра в отношении 1 : 4, проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру. Найти отношение объемов полученных частей тетраэдра.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный правильный тетраэдр, $AK : KB = 4 : 1$ и сечение $KLM \perp AB$ (рис.11.7). Если E — середина AB, то $KLM \parallel ECD$, как плоскости с параллельными парами пересекающихся прямых KL и KM, EC и ED. Из подобия следует, что

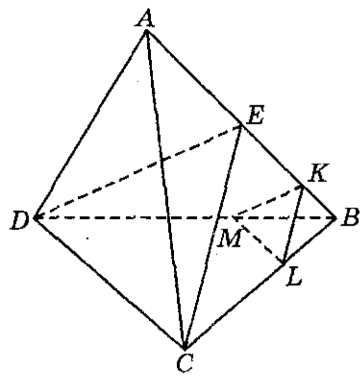


Рис. 11.7

$$\frac{V_{BKLM}}{V_{BECD}}=\left(\frac{BK}{BE}\right)^3=\frac{8}{125}\Rightarrow\frac{V_{BKLM}}{V_{ABCD}}=\frac{4}{125}\Rightarrow V_{BKLM}:V_{ACDKLM}=$$

$$=\frac{4}{125}:\left(1-\frac{4}{125}\right)=\frac{4}{121}.$$

Ответ: $\dfrac{4}{121}$.

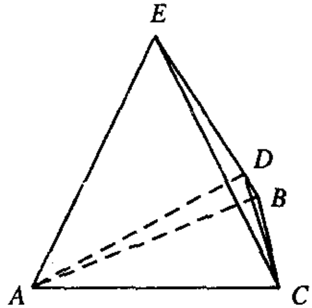


Рис. 11.8

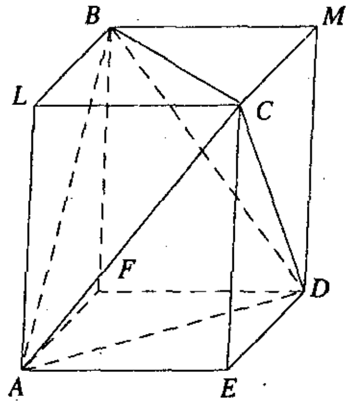


Рис. 11.9

11.201. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину и равны a. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два содержат по 45°, а третий — 60°. Определить объем пирамиды.

Решение.

Пусть $EABC$ — данная пирамида с основанием ABC, $\angle AEC = 60°$, $\angle BEC = \angle AEB = 45°$ (рис. 11.8). Проведем перпендикуляры из A и C на ребро EB. Они пересекутся в одной точке D, так как $\Delta AEB = \Delta BEC$. По условию, ΔAEC — правильный. ΔECD и ΔEAD — равнобедренные прямоугольные$\Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = a,\ DC = DA = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ADC = 90° \Rightarrow S_{ADC} = \frac{a^2}{4}.$$

$$ADC \perp EB \Rightarrow V_{EABC} = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot EB = \frac{a^3}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{12}$.

11.202. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (рис. 11.9), тогда докажем, что полученное тело — параллелепипед. Обозначим через a_1 и a_2 плоскости, проходящие через AB и CD параллельно CD и AB, соответственно.

Если l — линия пересечения α_1 и α_2, то $l \parallel AB$, $l \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CD$, что невозможно, т.е. $\alpha_1 \parallel \alpha_2$. Таким образом, наше тело состоит из трех пар параллельных граней, т.е. $AFDELBMC$ — параллелепипед.

Объем $ABCD$ равен объему параллелепипеда без объемов четырех пирамид $CAED$, $CABL$, $CBMD$, $BAFD$. Рассмотрим любую из них, пусть $CAED$. Если h — высота пирамиды, проведенной из C, то

$$V_{CAED} = \frac{1}{3}h \cdot S_{AED} = \frac{1}{6}h \cdot S_{AFDE} = \frac{1}{6}V_{\text{парал.}} = \frac{1}{6}V.$$

Также показывается, что объемы остальных пирамид равны

$$\frac{1}{6}V_{\text{парал.}} \Rightarrow V_{ABCD} = V - 4 \cdot \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V.$$

Ответ: 3.

11.203. Через каждые три вершины куба, расположенные на концах каждой тройки ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость (рис. 11.10). Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями, если ребро куба равно a.

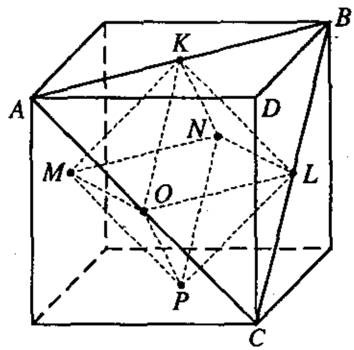


Рис. 11.10

Решение.

Центр каждой грани данного куба соединим с центрами всех смежных граней. Полученное тело $KNLOMP = \Phi$ — искомое. Это следует из того, что если рассмотреть его произвольную грань KLO, то она лежит в плоскости ΔABC, вершинами которого являются вершины тройки ребер данного куба, сходящихся к одной вершине D. $MNLO$ — квадрат со стороной

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \left(OL = \frac{1}{2} AB \right),$$ высота h, проведенная из K на $MNLO$, равна

$$\frac{a}{2} \Rightarrow V_{\Phi} = 2V_{KMNLO} = 2 \cdot \frac{1}{3} h \cdot S_{MNLO} = \frac{a^3}{6}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{6}$.

11.204. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены перпендикуляр длиной a к боковому ребру и перпендикуляр длиной b к боковой грани. Найти объем пирамиды.

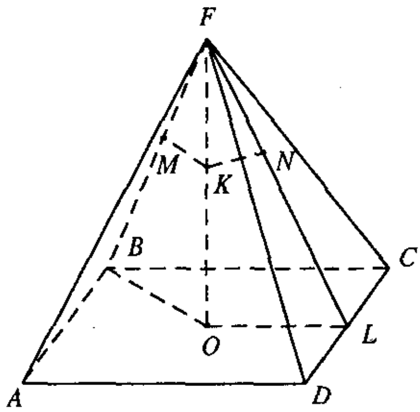


Рис. 11.11

Решение.

Пусть K — середина высоты FO данной правильной пирамиды $FABCD$, L — середина ребра CD (рис. 11.11). Тогда $CD \perp FLO \Rightarrow FLO \perp FCD$, перпендикуляр KN к грани FCD принадлежит FLO. Проведем KM — перпендикуляр к ребру FB. Тогда, по условию, $KM = a$, $KN = b$. Пусть $h = FO$, $x = OL$.

$$\Delta OFL \sim \Delta KFN \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{FL}{FK} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{2\sqrt{h^2+x^2}}{\cdot h}.$$

$$\Delta OFB \sim \Delta KFM \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{a} = \frac{FB}{FK} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{a} = \frac{2\sqrt{h^2+2x^2}}{h}.$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{b^2} = \dfrac{4h^2+4x^2}{h^2}, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{2h^2+4x^2}{h^2} \end{cases} \Rightarrow 2 = x^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)h = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2-a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{FABCD} = \frac{1}{3}h(2x)^2 = \frac{16a^3b^3}{3\left(a^2-b^2\right)\sqrt{2b^2-a^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{16a^3b^3}{3\left(a^2-b^2\right)\sqrt{2b^2-a^2}}$ при $b < a < \sqrt{2}b$.

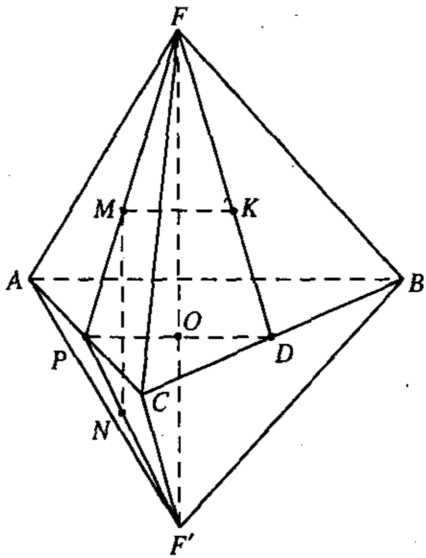


Рис. 11.12

11.205. Два правильных тетраэдра соединены двумя гранями так, что образуют двойную пирамиду. Центры шести боковых граней этой двойной пирамиды приняты за вершины прямой треугольной призмы. Вычислить объем этой призмы, если ребро тетраэдра равно a.

Решение.

Пусть M, K, N — центры трех граней данной двойной пирамиды $FF'ABC$, O — центр ΔABC, P и D — середины AC и BC (рис. 11.12). Тогда MK — сторона основания искомой прямой призмы, MN — ее боковое ребро.

$MN \parallel FF' \Rightarrow MN \perp ABC \Rightarrow$ искомая призма прямая (ее основания параллельны ABC). Из подобия треугольников получаем

$\frac{MN}{FF'} = \frac{PM}{PF} = \frac{1}{3}, \frac{MK}{PD} = \frac{MF}{PF} = \frac{2}{3}$. Но $PD = \frac{a}{2}$ (средняя линия ΔABC),

$$FF' = 2FO = 2\sqrt{PF^2 - PO^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда объем искомой призмы равен $\frac{MN \cdot MK^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}a^3}{54}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^3}{54}$.

11.206. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a; площадь ее сечения, имеющего форму квадрата, равна m^2 (рис. 11.13). Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.

Решение.

Рассмотрим $KLMN$ — сечение данной правильной пирамиды $EABC$, являющееся квадратом. $MN \| LK \Rightarrow MN \| EBC \Rightarrow MN \| EC$. Аналогично $ML \| AB$. Из подобия треугольников получаем:

$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{EC} \Rightarrow EC = \frac{am}{a-m} (AM = a - MC = a - m, MN = m)$. Следовательно, апофема h боковой грани равна

$\sqrt{EC^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3m^2 - a^2 + 2am}}{2(a-m)}$, а площадь боковой поверхности —

$3\frac{ah}{2}$, площадь основания — $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда их отношение равно

$\frac{\sqrt{9m^2 - 3a^2 + 6am}}{a-m}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{9m^2 - 3a^2 + 6am}}{a-m}$.

11.207. Два куба с ребром, равным a, имеют общий отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Найти объем общей части этих кубов.

Решение.

Пусть E и F — центры граней $ABCD$, $KLMN$ данного куба $\Phi_1 = ABCDKLMN$, Φ_2 — куб, полученный из Φ_1 поворотом на 45° вокруг EF (по часовой стрелке, если смотреть от E к F), точки P_1, P_2, P_3 ребер

куба Φ_1 таковы, что $BP_1 = CP_2 = CP_3 = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$ (рис. 11.14). Тогда

$P_2P_3 = \sqrt{2CP_2^2} = a(\sqrt{2}-1) = P_1P_2 = a - 2CP_2$. Так как $EP_1 = EP_2 = EP_3$ (по построению), то $\Delta EP_1P_2 = \Delta EP_2P_3 \Rightarrow \angle EP_1P_2 + \angle EP_2P_1 = \angle EP_2P_3 + \angle EP_2P_1 = 135° \Rightarrow \angle P_1EP_2 = \angle P_2EP_3 = 45°$. Следовательно, при повороте вокруг EF на 45° P_1 перейдет в P_2, P_2 перейдет в P_3. Аналогично и для точек Q_1, Q_2, Q_3, где $LQ_1 = MQ_2 = MQ_3 = BP_1$. Таким образом, грань $BLMC$ куба Φ_1 после поворота пройдет через точки P_2, Q_2, Q_3, P_3,

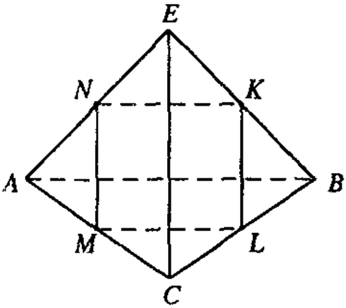


Рис. 11.13

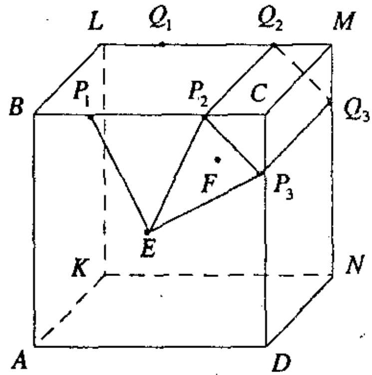


Рис. 11.14

т.е. отсечет от Φ_1 прямоугольную призму $\Pi = P_2CP_3Q_2MQQ_3$ объема $\frac{1}{2}MC\cdot CP_2^2 = \frac{a^3}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$. Объем общей части кубов Φ_1 и Φ_2 будет равен объему Φ_1 без объемов четырех призм, равных призме Π, т.е. равен $a^3 - 4V_{\text{п}} = 2a^3\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Ответ: $2a^3\left(\sqrt{2}-1\right)$

11.208. Через концы трех ребер, выходящих из вершин B, D, A_1 и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, проведены плоскости. Доказать, что полученная фигура есть правильный тетраэдр, и вычислить его полную поверхность и объем.

Решение.

Тетраэдр $\Phi = AB_1CD_1$ правильный, так как каждая его грань — правильный треугольник со стороной $a\sqrt{2}$ (диагонали граней данного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$) (рис. 11.15), следовательно площадь полной поверхности

Φ равна $4\cdot\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$,

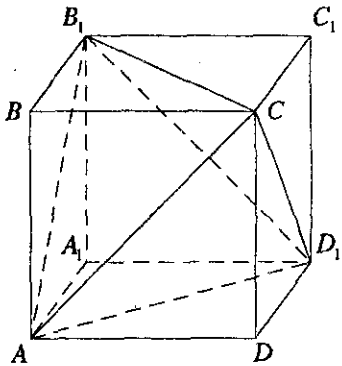


Рис. 11.15

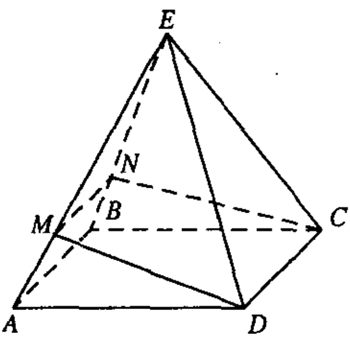


Рис. 11.16

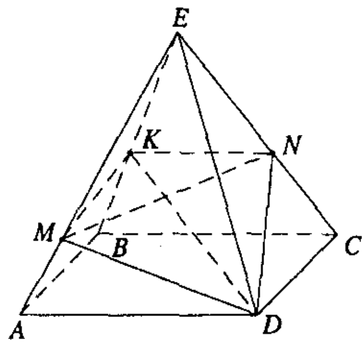


Рис. 11.17

а объем Φ равен объему куба без объемов четырех пирамид, равных $ACDD_1$, т.е. $V_\Phi = a^3 - 4\cdot\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}a^2$; $\frac{a^3}{3}$.

11.209. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью 4 см². Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна 25 см².

Решение.

Рассмотрим сечение $CDMN$ данной правильной пирамиды $EABCD$ (рис. 11.16), которое отсекает от боковой грани ΔEMN площадью 4.

$$CD \| AB \Rightarrow MN \| AB \Rightarrow \Delta EMN \sim \Delta FAB \Rightarrow \left(\frac{EM}{FA}\right)^2 = \frac{S_{FMN}}{S_{FAB}} = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{EM}{EA} = \frac{S_{EDM}}{S_{EDA}} \Rightarrow S_{EDM} = 5$$

и площадь боковой поверхности пирамиды $EMNCD$ равна

$$S_{EMN} + 2S_{EDM} + S_{ECD} = 4 + 10 + \frac{25}{4} = 20{,}25.$$

Ответ: 20,25 см².

11.210. Доказать, что объемы двух треугольных пирамид, имеющих по равному трехгранному углу, относятся как произведения длин трех ребер равных трехгранных углов.

Решение.

Рассмотрим две пирамиды $EABC$, $E_1A_1B_1C_1$ с одинаковыми трехгранными углами при вершинах E и E_1. Проведем высоту AO на грань EBC. Тогда $AO = AE \cdot \sin(\angle AEO)$ и

$$V_{EABC} = \frac{1}{3} AO \cdot S_{EBC} = \frac{1}{3} AE \cdot \sin(\angle AEO) \cdot BE \cdot CE \cdot \sin(\angle BEC).$$

Аналогично,

$$V_{E_1A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} A_1E_1 \cdot B_1E_1 \cdot C_1E_1 \cdot \sin(\angle A_1E_1O_1) \cdot \sin(\angle B_1E_1C_1),$$

где A_1O_1 — высота пирамиды $E_1A_1B_1C_1$.

$\angle B_1E_1C_1 = \angle BEC, \angle A_1E_1O_1 = \angle AEO$ (по условию)$\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{V_{EABC}}{V_{E_1A_1B_1C_1}} = \dfrac{AE \cdot BE \cdot CE}{A_1E_1 \cdot B_1E_1 \cdot C_1E_1}$, что и требовалось доказать.

11.211. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a; боковое ребро составляет с высотой угол 30°. Через вершину основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Эта плоскость разбивает пирамиду на две части (рис. 11.17). Определить объем части пирамиды, прилегающей к вершине.

Решение.

Пусть $EABCD$ данная правильная пирамида, сечение $DMKN$ перпендикулярно BE.

По условию $\angle BED = 60° \Rightarrow \Delta BED$ — правильный со стороной $a\sqrt{2} \Rightarrow K$ — середина BE, $KE = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $KD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Далее, $\Delta EMK = \Delta ENK \Rightarrow EM = EN \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow MN \perp ED$ (т.к. $AC \perp ED) \Rightarrow MN \perp KD \Rightarrow S_{DMKN} = \dfrac{1}{2} MN \cdot KD$.

Пусть $a = \angle BEA$. По теореме косинусов для ΔEAB получаем $\cos\alpha = \dfrac{2BE^2 - AB^2}{2BE^2} = \dfrac{3}{4}\left(AB = a, BE = a\sqrt{2}\right)$. ΔENM — правильный $\Rightarrow$

$$MN = EM = \frac{KE}{\cos\alpha} = \frac{4a}{3\sqrt{2}}.$$

Окончательно получаем: $V_{EDMKN} = \frac{1}{3} KE \cdot \frac{MN \cdot KD}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

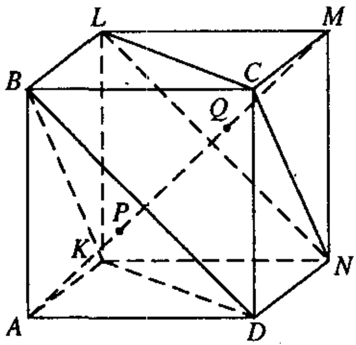


Рис. 11.18

11.212. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Определить полную поверхность куба.

Решение.

Рассмотрим расстояние между диагоналями CN и BD граней данного куба $ABCDKLMN$ равное d (рис. 11.18). $\Delta BDK \parallel \Delta CLN$, так как $LC \parallel KD$, $CN \parallel BK$, следовательно, расстояние между этими треугольниками равно расстоянию между скрещивающимися прямыми CN и BD, т.е. равно d. Если P и O — центры правильных ΔBDK и ΔCLN, то из симметрии куба, его диагональ AM пройдет через P и O, причем AP и MO — высоты правильных пирамид $ABDK$ и $MLCN \Rightarrow$

$\Rightarrow PO = d$, $AP = MO = \frac{AM - d}{2} = \frac{x\sqrt{3} - d}{2}$, где x — сторона куба. С другой стороны,

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \left(BP = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3} - d}{2} \Rightarrow x = d\sqrt{3}$$

и площадь поверхности куба равна $18d^2$.

Ответ: $18d^2$.

11.213. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра 4 и 12 см, а каждое из остальных ребер равно 7 см.

Решение.

Пусть в данной пирамиде $EABC$ (рис. 11.12) $EB = 12$, $AC = 4$, остальные ребра равны 7. Если D — середина AC, то ED и BD — высоты равнобедренных ΔAEB и ΔABC (рис. 11.19).

$\Delta AEC = \Delta ABC \Rightarrow ED = BD = \sqrt{EC^2 - DC^2} = \sqrt{45}$. Пусть DM — высота ΔEDB, тогда

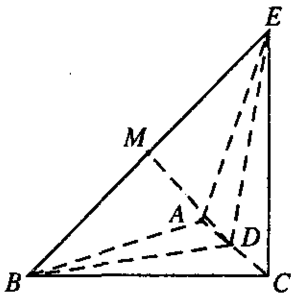


Рис. 11.19

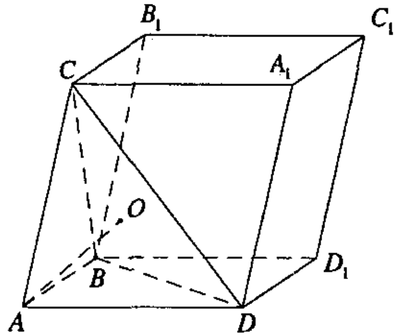


Рис. 11.20

$$DM = \sqrt{ED^2 - EM^2} = 3, \quad S_{EBD} = 18.$$

$$AC \perp EBD \Rightarrow V_{EABC} = \frac{1}{3} AC \cdot S_{EBD} = 24.$$

Ответ: 24 см³.

11.214. Гранями параллелепипеда служат ромбы, диагонали которых равны 3 и 4 см. В параллелепипеде имеются трехгранные углы, составленные тремя острыми углами ромбов. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть A — вершина данного параллелепипеда $\Phi = ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.20), к которой примыкают острые углы его граней.

Так как ромб однозначно определяется своими диагоналями, то все грани Φ равны между собой, а его ребра равны $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$. Пирамида $ABCD$ — правильная, так как ΔBCD правильный со стороной 3 и $AC = AB = AD = \frac{5}{2}$. Если AO — высота этой пирамиды, то

$$AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \left(CO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \right), \quad V_{ABCD} =$$

$$= \frac{1}{3} AO \cdot S_{BCD} = \frac{9\sqrt{39}}{24}.$$

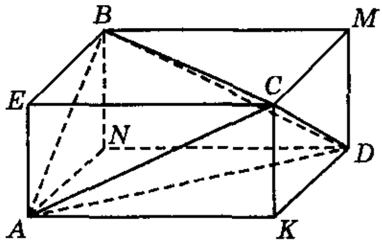


Рис. 11.21

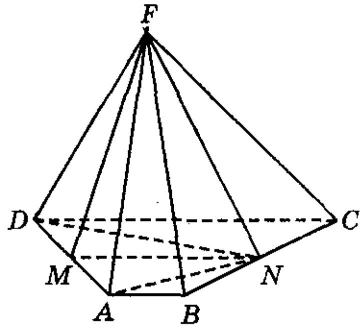


Рис. 11.22

Далее, пусть h — высота пирамиды $ABCD$, проведенная из вершины C к основанию ABD, тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}h \cdot S_{ABD} = \frac{1}{6}h \cdot S_{ABD_1D} = \frac{1}{6}V_\Phi \Rightarrow V_\Phi = 6 \cdot V_{ABCD} = \frac{9\sqrt{39}}{4}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{39}}{4}$ см^3.

11.215. Найти объем треугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, b и c, если каждая из этих сторон равна боковому ребру, не пересекающемуся с ней.

Решение.

Через каждое ребро данной пирамиды $ABCD$ проведем плоскость параллельно противоположному ребру, тогда полученное тело $\Phi = ANDKEBMC$ — параллелепипед (рис. 11.21), где $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_\Phi$ (это было доказано в решении задачи 11.202). Кроме того, по условию, $AB = CD \Rightarrow AB = EN$, т.е. грани Φ — прямоугольники $\Rightarrow V_\Phi = KA \cdot KC \cdot KD$. Если $AC = a$, $CD = b$, $AD = c$, то по теореме Пифагора

$$a^2 = KA^2 + KC^2,\ b^2 = KC^2 + KD^2,\ c^2 = KA^2 + KD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KA^2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2},\ KC^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2},\ KD^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Таким образом, получаем искомый объем.

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

11.216. Основание пирамиды $FABCD$ есть трапеция с параллельными сторонами AB и CD. Доказать, что объем пирамиды равен 4/3 произведения площади треугольника MFN, где MN — средняя линия трапеции, на расстояние ребра AB от плоскости MFN.

Решение.

Пусть h_1 и h_2 высоты, проведенные из A и D на плоскость ΔFMN; h — высота, проведенная из F на основание $ABCD$ данной пирамиды $FABCD$, $2r$ — высота трапеции $ABCD$ (рис. 11.22). Тогда

$$S_{ADN} = S_{AMN} + S_{DMN} = \frac{1}{2}MN \cdot r + \frac{1}{2}MN \cdot r = MN \cdot r = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{FABCD} = \frac{h}{3} \cdot S_{ABCD} = \frac{h}{3} \cdot 2S_{ADN} = 2V_{FADN}.$$

С другой стороны,

$$V_{FADN} = V_{FAMN} + V_{FDMN} = \frac{1}{3}h_1 \cdot S_{FMN} + \frac{1}{3}h_2 \cdot S_{FMN} = \frac{2}{3}h_1 \cdot S_{FMN}$$

($h_1 = h_2$, так как $AM = MD$) $\Rightarrow V_{FABCD} = \dfrac{4}{3}h_1 \cdot S_{FMN}$, что и требовалось доказать (h_1 и есть расстояние AB от FMN, так как $AB \parallel FMN$).

11.217. Многогранник имеет следующее строение: две его грани (основания) представляют собой многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях; остальные грани (боковые) — трапеции, параллелограммы или треугольники, у которых каждая вершина является одновременно вершиной одного из оснований. Доказать, что объем такого многогранника равен $\frac{1}{6}H \cdot (S_1 + S_2 + 4S_3)$, где H — расстояние между плоскостями основания, S_1 и S_2 — площади оснований, а S_3 — площадь сечения, равноотстоящего от обоих оснований.

Решение.

Многогранник можно разбить на тетраэдры T, вершины которых совпадают с вершинами многогранника и, доказав требуемую формулу для любого тетраэдра Ф и просуммировав их объемы, получим эту же формулу для всего многогранника. Имеем два случая.

1) Три вершины тетраэдра Ф принадлежат одной из данных параллельных плоскостей, образуя треугольник площади S_2. Тогда по условию задачи, $S_1 = 0$ и из подобия получаем $\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{1}{4}$. Таким образом,

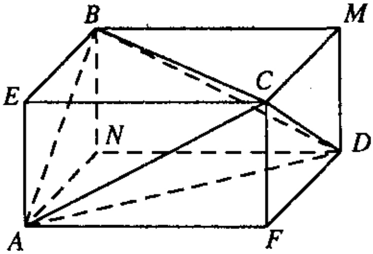


Рис. 11.23

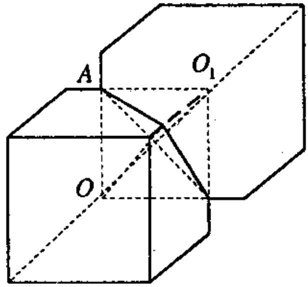


Рис. 11.24

$V_{\Phi} = \frac{1}{3} H \cdot S_2 = \frac{1}{6} H\left(S_2 + S_2\right) = \frac{1}{6} H\left(S_2 + 4S_3\right)$, что и требовалось доказать.

2) Если ребра BC и AD данного тетраэдра $\Phi = ABCD$ лежат в параллельных плоскостях, $P_1P_2P_2P_4$ — сечение тетраэдра площади S_3, равноотстоящее от AB и CD, то точки P_1, P_2, P_3, P_4 являются серединами ребер AC, AB, DB, DC и, как средние линии соответствующих граней, параллельны BC или $AD \Rightarrow P_1P_2P_2P_4$ — параллелограмм со сторонами $\frac{BC}{2}, \frac{AD}{2}$ и углом α между ними, равным углу между BC и AD.

Через каждое ребро Φ проведем плоскость, параллельно противоположному ребру. Полученное тело $\Pi = ANDFEBMC$ (рис. 11.23) — параллелепипед и $V_{\Phi} = \frac{1}{3} V_{\Pi}$ (это было доказано в решении задачи 11.202), а его высота равна H. Диагонали основания $ANDF$ равны

$$BC \text{ и } AD \Rightarrow V_{\Pi} = H \cdot S_{ANDF} = \frac{1}{2} H \cdot BC \cdot AD \cdot \sin\alpha =$$

$$= \left(\frac{BC}{2} \cdot \frac{AD}{2} \cdot \sin\alpha\right) \cdot 2H = 2H \cdot S_3 \Rightarrow V_{\Phi} = \frac{H}{6} \cdot 4S_3,$$

что и требовалось доказать (в этом случае $S_1 = S_2 = 0$).

11.218. Фигура ограничена сверху и снизу двумя прямоугольниками со сторонами, равными a, b и a_1, b_1, а сбоку — трапециями. Стороны прямоугольников параллельны; расстояние между параллельными плоскостями прямоугольных оснований равно h. Найти объем фигуры.

Решение.

Проведем плоскость, параллельную основаниям данной фигуры Ф и равноотстоящую от них. Полученное сечение будет прямоугольником П, так как его стороны параллельны соответствующим сторонам оснований Ф и стороны П являются средними линиями соответствующих боковых граней Ф, т.е. равны $\frac{a+a_1}{2}$ или $\frac{b+b_1}{2} \Rightarrow S_n = \frac{a+a_1}{2} \cdot \frac{b+b_1}{2}$.

Используя формулу из задачи 11.217. получаем:

$$V_{\Phi} = \frac{h}{6}\left(ab + a_1b_1 + 4S_n\right) = \frac{h}{6}\left(2ab + 2a_1b_1 + a_1b + ab_1\right).$$

Ответ: $\frac{h}{6}\left(2ab + 2a_1b_1 + a_1b + ab_1\right)$.

11.219. Диагонали двух одинаковых кубов с ребром, равным a, лежат на одной и той же прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого, и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей части этих кубов.

Решение.

Пусть первоначально угол поворота 0°. Если провести сечение через центр общей части двух кубов перпендикулярно диагонали, то получится правильный шестиугольник. После поворота на 60° этот шестиугольник совместится сам с собой, т.е. ребра кубов пересекаются (рис. 11.24). Тогда общая часть состоит из двух одинаковых правильных треугольных пирамид с вершинами в точках O и O_1. Так как все углы при вершине — прямые, то объем каждой пирамиды $V_1 = \frac{b^3}{6}$, где $b = OA$. Высота каждой из пирамид $h = \frac{OO_1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. С другой стороны, $V_1 = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h$, где $S_{\text{осн.}} = \frac{\left(b\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$. Имеем $\frac{b^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{2}h$, откуда $h = \frac{b\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, т.е. $b = \frac{3a}{4}$. Итак, искомый объем $V = 2V_1 = \frac{b^3}{3} = \frac{9a^3}{64}$.

Ответ: $\frac{9a^3}{64}$.

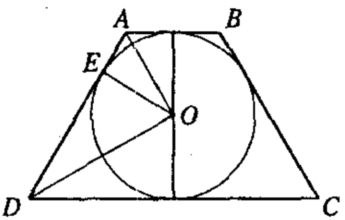


Рис. 11.25

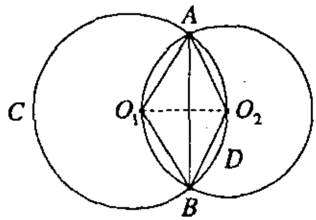


Рис. 11.26

11.220. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади его верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данного усеченного конуса — равнобедренную трапецию $ABCD$, в которую можно вписать окружность с центром O и радиусом r, где r — радиус вписанного шара (рис. 11.25). Пусть окружность O касается боковой стороны AD трапеции $ABCD$ в точке E и $AB = 2x$, тогда $DC = 2\sqrt{a}x$ (по условию),

$$AE = x,\ DE = \sqrt{a}x,\ \angle AOD = 90^\circ \Rightarrow r^2 = OE^2 = AE \cdot DE = \sqrt{a}x^2.$$

Объем V_k данного конуса равен $\frac{2r}{3}\left(\pi x^2 + \pi a x^2 + \pi\sqrt{a}x^2\right)$, объем $V_ш$ вписанного в него шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_k}{V_ш} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

Ответ: $\frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

11.221. В конус вписан шар. Доказать, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

Решение.

Если l — образующая конуса, r — радиус его основания, R — радиус вписанного в конус шара, то осевым сечением конуса будет равнобедренный ΔABC с основанием $2r$ и боковой стороной l, R — радиус вписанной в него окружности $\Rightarrow S_{ABC} = R(l + r) = h \cdot r$, где r — высота $\Delta ABC \Rightarrow R(l+r) = r\sqrt{l^2 - r^2}$.

Площадь S_k полной поверхности конуса равна $pr^2 + prl$, площадь $S_ш$

поверхности шара равна $4\pi R^2$, объем V_k конуса равен $\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$,

объем $V_ш$ шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{S_k}{S_ш}=\frac{r(r+l)}{4R^2}$,

$\frac{V_k}{V_ш}=\frac{r^2\sqrt{l^2-r^2}}{4R^3}=\frac{r(R(l+r))}{4R^3}=\frac{r(l+r)}{4R^2}=\frac{S_k}{S_ш}$, что и требовалось доказать.

11.222. Высота цилиндра равна радиусу его основания и имеет длину a. Через ось цилиндра проведена другая цилиндрическая поверхность, делящая окружность основания на две дуги, длины которых относятся как 2 : 1. Эта цилиндрическая поверхность делит данный цилиндр на две части. Найти боковую поверхность и объем большей части цилиндра.

Решение.

Пусть основание данного цилиндра — окружность с центром O_1 — делится другой окружностью, проходящей через O_1, на две дуги $\cup ACB$, $\cup ADB$, длины которых относятся как $2:1 \Rightarrow \cup ACB = 240°$, $\cup ADB = 120° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AO_1B = 120°$ (центральный угол, опирающийся на дугу в 120°) (рис. 11.26). Если O_2 — середина $\cup ADB$, то $\angle AO_1O_2 = 60°$, $O_1A = O_1O_2 =$ $= a \Rightarrow AO_2 = a$, т.е. O_2 — центр второй окружности $\Rightarrow \cup AO_1B = \cup AO_2B \Rightarrow$ $\Rightarrow |\cup ACB| + |\cup AO_1B| = 2\pi a \Rightarrow$ площадь боковой поверхности большей части Ф данного цилиндра, разделенного новой цилиндрической поверхностью (сечение которой плоскостью основания данного цилиндра является окружностью O_2), равна $2\pi a^2$.

Далее, $S_{O_1AB}=\frac{a^2\sin 120°}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, $S_{O_1ADB}=\frac{\pi a^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ADB}=\frac{\pi a^2}{3}-\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow$ площадь общей части кругов O_1 и O_2 равна $2S_{ADB}$. Поэтому площадь части круга O_1 без $2S_{ADB}$ равна $\frac{a^2}{6}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$, откуда $V_Ф=\frac{a^3}{6}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $2\pi a^2; \frac{a^3}{6}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

11.223. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел. При каких значениях q задача не имеет решения?

Решение.

Пусть осевое сечение данного конуса Ф есть равнобедренный ΔABC с высотой h, основанием $2a$, боковой стороной l и радиусом описанного круга R, где R — радиус шара $Ш$, описанного около Ф. Тогда

$$V_\Phi = \frac{1}{3}\pi a^2 h, V_ш = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{q}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_T}{V_Ш} = \frac{q^3}{4}\left(\frac{a}{h}\right)^2.$$

Далее, $S_{ABC} = a \cdot h = \frac{2a}{4R}l^2 \Rightarrow 2Rh = l^2 = a^2 + h^2$. По условию

$$R = \frac{h}{q} \Rightarrow \frac{2h^2}{q} = a^2 + h^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{2-q}{q} \Rightarrow \frac{V_T}{V_Ш} = \frac{q^2(2-q)}{4}$$ (причем $2 - q > 0$).

Ответ: если $0 < q < 2$, то $\frac{q^2(2-q)}{4}$; при $q \geq 2$ решений нет.

11.224. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определить поверхность шара, вписанного в пирамиду.

Решение.

Если FE — высота данной правильной пирамиды $FABCD$ (рис. 11.27), K — центр описанного около пирамиды шара радиуса R, то ясно, что K лежит на высоте FE. По условию,

$$KE = \frac{R}{2}, KA = R \Rightarrow \angle KAE = 30° \Rightarrow AE = \frac{R\sqrt{3}}{2}, ME = \frac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Пусть O — центр вписанного в пирамиду шара радиуса x, M — середина AB. Тогда $AB \perp ME$, $AB \perp FM \Rightarrow AB \perp MFE \Rightarrow ABF \perp MFE \Rightarrow$ радиус ON вписанного шара, проведенный к точке касания N с гранью ABF, лежит в плоскости MFE. Далее,

$$\Delta NFO \sim \Delta MFE \Rightarrow \frac{x}{ME} = \frac{FE - x}{FM}.$$

Имеем два случая.

1) K лежит внутри пирамиды. Тогда $FE = KE + KF = \frac{3R}{2}$,

$$FM = \sqrt{ME^2 + FE^2} = R\sqrt{\frac{21}{8}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{3R}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{R(\sqrt{7}-1)}{4},$$

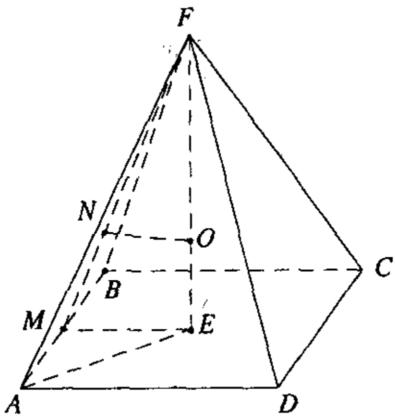


Рис. 11.27

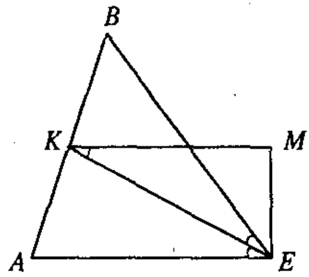


Рис. 11.28

$$4\pi x^2 = \frac{\pi R^2\left(4-\sqrt{7}\right)}{2}.$$

2) K лежит вне пирамиды. Тогда

$$FE = KF - KE = \frac{R}{2},$$

$$FM = R\sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{R}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{R\left(\sqrt{15}-3\right)}{4},$$

$$4\pi x^2 = \frac{\pi R^2\left(12-3\sqrt{15}\right)}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^2\left(4-\sqrt{7}\right)}{2}$ или $\frac{\pi R^2\left(12-3\sqrt{15}\right)}{2}$.

11.225. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса и его образующая равны h и l. Вычислить площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

Решение.

Пусть ΔABE — осевое сечение данного конуса, $l = AE = BE$ (рис. 11.28). Так как угол AEK между высотой KE данного конуса и плоскостью, по которой он катится, не меняется, то KE описывает коническую поверхность с образующей $h = KE$ и осью EM. Таким образом,

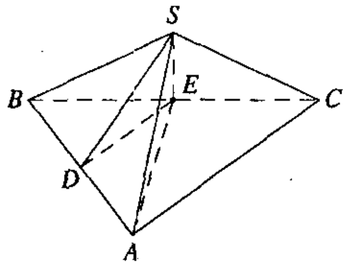


Рис. 11.29

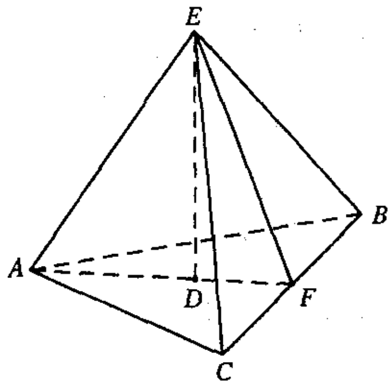


Рис. 11.30

имеем $\angle MKE = \angle KEB \Rightarrow \Delta EKM \sim \Delta EKB \Rightarrow \frac{h}{l} = \frac{KM}{h} \Rightarrow KM = \frac{h^2}{l}$ и площадь поверхности, описываемой KE, равна $\pi \cdot KM \cdot KE = \frac{\pi h^3}{l}$.

Ответ: $\frac{\pi h^3}{l}$.

11.226. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC такой, что $AB = AC = 10$ см и $BC = 12$ см. Грань SBC перпендикулярна основанию, и $SB = SC$ (рис. 11.29). Вычислить радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1,4 см.

Решение.

Высота SK данной пирамиды $SABC$ лежит в плоскости SBC, так как $SBC \perp ABC$ (по условию), следовательно E — середина BC (ΔSBC — равнобедренный) $\Rightarrow AE \perp BC$. Если SD — апофема грани SAB, то $DE \perp AB$.

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 8. \Delta BED \sim \Delta BEA \Rightarrow \frac{DE}{8} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = 4{,}8;\ SD = 5.$$

Если x — радиус шара, вписанного в данную пирамиду, то

$$V_{SABC} = \frac{x}{3}\left(S_{ABC} + S_{SBC} + 2S_{SAB}\right) =$$

$= \frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}AE\cdot BC+\frac{1}{2}SE\cdot BC+SD\cdot AB\right)=\frac{532}{15}x$, а с другой стороны,

$V_{SABC}=\frac{1}{3}SE\cdot S_{ABC}=\frac{112}{5}\Rightarrow x=\frac{12}{19}$.

Ответ: $\frac{12}{19}$ см.

11.227. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны a, b и c, плоские углы, образованные этими ребрами, — прямые (рис. 11.30). Найти длину высоты, проведенной к основанию пирамиды.

Решение.

Пусть в данной пирамиде $EABC$ боковые ребра EA, EB, EC попарно перпендикулярны и равны a, b, c соответственно. Проведем высоту AF в ΔABC. $EA\perp FBC$ и $BC\perp EF$, тогда $BC\perp AEF\Rightarrow AEF\perp ABC$, следовательно, высота ED пирамиды $EABC$ лежит в плоскости AEF. Таким образом, ясно, что $V_{EABC}=\frac{abc}{6}$, а с другой стороны,

$$V_{EABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot ED=\frac{AF\cdot BC\cdot ED}{2\cdot 3}.$$

$$BC=\sqrt{b^2+c^2},\ AF=\sqrt{a^2+EF^2},\ EF\cdot BC=EC\cdot EB=2S_{EBC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{BC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}ED\cdot AF\cdot BC=\frac{1}{6}ED\cdot\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\frac{abc}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ED=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

Ответ: $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.

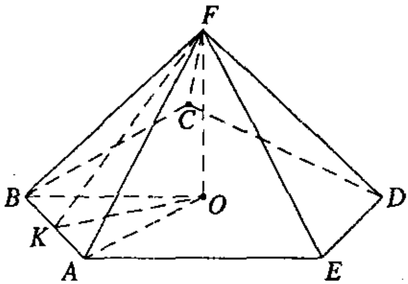


Рис. 11.31,а

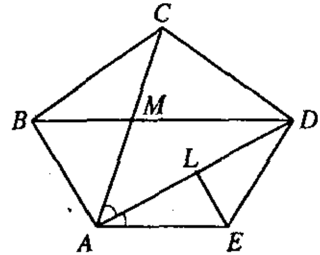


Рис. 11.31,б

11.228. Доказать, что если в многогранник можно вписать сферу, то его объем равен 1/3 произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

Решение.

Соединим центр O вписанной сферы с вершинами данного многогранника Ф. Тогда Ф разобьется на пирамиды с вершинами O, основания которых — грани Ф, а высоты равны радиусу r сферы. Тогда $V_{\Phi}=\frac{1}{3}r\cdot S_1+\frac{1}{3}r\cdot S_2+\ldots+\frac{1}{3}r\cdot S_n=\frac{r}{3}\left(S_1+\ldots+S_n\right)$, где S_i — площадь i-й грани Ф. Что и требовалось доказать.

11.229. Найти объем правильной пирамиды, в основании которой лежит правильный пятиугольник, а боковыми гранями являются правильные треугольники со стороной a.

Решение.

Если FO — высота данной правильной пирамиды $\Phi = FABCDE$ (рис. 11.31,а), K — середина AB, то

$$S_{ABCDE}=5S_{AOB}=5\frac{a\cdot OK}{2},\ FO=\sqrt{FK^2-OK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-OK^2},$$

$$V_{\Phi}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5a\cdot OK}{2}\cdot\frac{\sqrt{3a^2-4\cdot OK^2}}{2}.$$

Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$ (рис. 11.31,б). Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD, d — длина диагоналей правильного пятиугольника.

$BC \parallel AD \Rightarrow \angle BAC=\angle CAD=\angle ADB \Rightarrow$

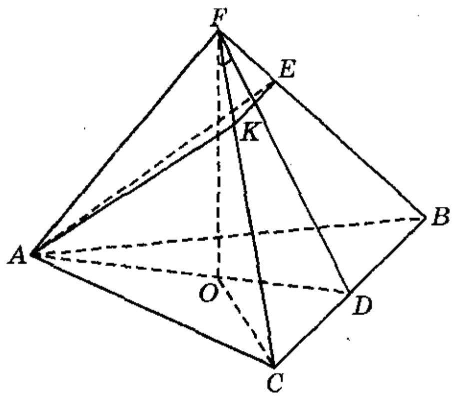


Рис. 11.32

$$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow a : d = (d - a) : a$$

($AMDE$ — параллелограмм, следовательно, $MD = AE = a$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$. Проведем перпендикуляр EL на AD. Имеем

$\angle DAE = 36° \Rightarrow \cos 36° = \dfrac{d}{2a} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \Rightarrow \operatorname{ctg} 36° = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$. Так как

$\angle BOK = 36°$, то $OK = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg} 36° = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, $V_{\Phi} = \dfrac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$.

Ответ: $\dfrac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$.

11.230. Высота правильной треугольной пирамиды равна H (рис. 11.32). Найти ее полную поверхность, если плоскость проведенная через вершину основания пирамиды перпендикулярно апофеме противоположной боковой грани, составляет с плоскостью основания угол 30°.

Решение.

По условию, плоскость AKE перпендикулярна FD и угол между нею и плоскостью ABC равен 30° (рис. 11.32). Проведем высоту FO; тогда

$\angle OFD = 30°$ и $\Delta OFD = \Delta ODC$, $CD = FO = H$, $BC = 2H \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{осн.}} = \dfrac{4H^2\sqrt{3}}{4} = H^2\sqrt{3}$. Далее, в ΔOFD имеем

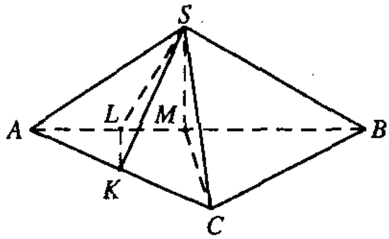


Рис. 11.33

$OD = \frac{FD}{2}$, $FD^2 = H^2 + \frac{FD^2}{4}$, т.е. $FD = \frac{2H}{\sqrt{3}}$. Таким образом,

$$S_{\text{полн.}} = H^2\sqrt{3} + 3\cdot 2H\cdot\frac{H}{\sqrt{3}} = 3H^2\sqrt{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}H^2$.

11.231. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный равнобедренный треугольник ABC, длина гипотенузы которого $AB = 4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая — через точку C и середину ребра AB.

Решение.

Пусть K и M — середины ребер AC и AB, L — середина отрезка AM, тогда $CM \parallel KN \Rightarrow CM \parallel SKN \Rightarrow$ расстояние x между CM и SK равно расстоянию между CM и плоскостью SKL (рис. 11.33). Это расстояние будет равно высоте пирамиды $MSKL$ проведенной из M на SKL. Далее, угол между CM и SK равен $\angle SKL$ $(180° - \angle SKL)$.

CM — медиана прямоугольного

$$\Delta ABC \Rightarrow KL = \frac{CM}{2} = \frac{AB}{4} = \sqrt{2},$$

$$SK = \sqrt{KC^2 + SC^2} = 2\sqrt{2} \quad \left(AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 4\right),$$

$$SM = \sqrt{CM^2 + SC^2} = 2\sqrt{3},\ SL = \sqrt{ML^2 + SM^2} = \sqrt{14}.$$

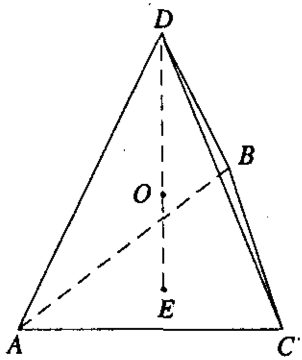


Рис. 11.34

По теореме косинусов для ΔSKL,

$$\cos\angle SKL=\frac{KL^2+SK^2-SL^2}{2\cdot KL\cdot SK}=-\frac{1}{2},\ \angle SKL=120^\circ\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{SKL}=\frac{KL\cdot SK\cdot\sin 120^\circ}{2}=\sqrt{3},\ V_{MSKL}=\frac{x}{3}\cdot S_{SKL}=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

С другой стороны,

$$V_{MSKL}=\frac{1}{3}SC\cdot S_{KML}=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_{ABC}}{8}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11.232. Доказать, что если тетраэдр ортоцентрический, т.е. такой, в котором прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке, то: *а)* каждые два его противоположных ребра взаимно перпендикулярны; *б)* если один из плоских углов при какой-либо вершине тетраэдра прямой, то и другие два плоских угла прямые; *в)* суммы квадратов длин его противоположных ребер равны; *г)* любая его вершина проектируется в ортоцентр противоположной грани (точку пересечения прямых, содержащих высоты грани).

Решение.

Пусть $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, O — точка пересечения его высот (рис. 11.34).

а) $BC\perp DO,\ BC\perp AO\Rightarrow BC\perp AOD\Rightarrow BC\perp AD.$

б) Пусть $CD \perp BD$. Из п. а) $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp ABD \Rightarrow CD \perp AD$. Также доказывается, что $BD \perp AD$.

в) Если через каждое ребро данного тетраэдра провести плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится параллелепипед Ф (см. Задачу 11.202), в котором ребра AB, CD являются диагоналями противоположных граней Ф. По п. *а)*, $AB \perp CD \Rightarrow$ диагонали каждой грани Ф перпендикулярны $\Rightarrow$ грани Ф — ромбы с одинаковой стороной $a \Rightarrow AB^2 + CD^2 = 4a^2$, что и требовалось доказать.

г) Если E — проекция D на грань ABC, то $BC \perp AD$ (из п. *а)*.) $\Rightarrow BC \perp AE$. Аналогично показывается, что $AC \perp BE$, $AB \perp CE$, т.е. E — ортоцентр ΔABC, что и требовалось доказать.

11.233. *а)* Длины ребер AB, AC, AD и BC ортоцентрического тетраэдра равны соответственно 5, 7, 8 и 6 см. Найти длины остальных двух ребер.

б) Является ли тетраэдр $ABCD$ ортоцентрическим, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $DC = 6$ см?

Решение.

а) Из п. *в)* задачи 11.232,

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{75},\ BD = \sqrt{51}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$ см, $\sqrt{51}$ см.

б) Если бы тетраэдр был ортоцентрическим, то $AB^2 + CD^2 =$ $= 100 = BC^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 100 - 144 < 0$, что невозможно.

11.234. В ортоцентрическом тетраэдре $ABCD$ угол ADC прямой. Доказать, что $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$, где h — длина высоты тетраэдра, проведенной из вершины D, $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$.

Решение.

По п. *б)* задачи 11.232, ребра AD, BD, CD попарно перпендикулярны, следовательно выполняются условия задачи 11.227, из решения которой следует, что

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}} \Rightarrow \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}},$$ что и требовалось доказать.

11.235. В ортоцентрическом тетраэдре $ABCD$ угол ABC прямой, S_1, S_2, S_3 — площади граней BAC, BAD, BCD соответственно. Доказать, что объем тетраэдра равен $\dfrac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$.

Решение.

По п. *б)* задачи 11.232, ребра BA, BC, BD попарно перпендикулярны. Если $a = BA$, $b = BC$, $c = BD$, то

$V_{ABCD} = \dfrac{abc}{6} = \dfrac{1}{6}\sqrt{(ab)\cdot(bc)\cdot(ac)} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$, что и требовалось доказать.

Решения к главе 12

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 12.1) можно вычислить по следующим формулам:

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \operatorname{tg} A; \qquad \text{(а)}$$

$$S = \frac{AB^2 - AD^2}{2} \operatorname{tg} \angle AOD, \qquad \text{(б)}$$

где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

2. Пусть известны длины b и c двух сторон треугольника ABC и угол A, образуемый ими (рис. 12.2). Тогда длина биссектрисы AD треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой

$$l_a = \frac{2bc\cos(A/2)}{b+c}.$$

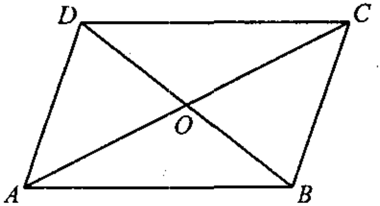


Рис. 12.1

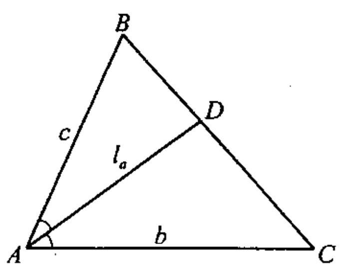


Рис. 12.2

3. Справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса:

$$l = 2R\sin\alpha ; \qquad (а)$$

$$l^2 = 2RH , \qquad (б)$$

где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания.

Такие же соотношения справедливы и для вписанной в шар пирамиды, боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

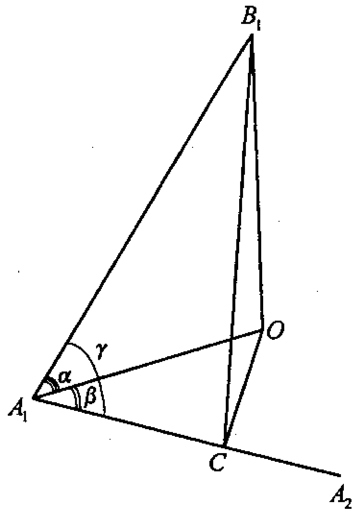


Рис. 12.3

4. Пусть A_1B_1 — боковое ребро пирамиды или призмы, A_1O — его проекция на плоскость основания, $\angle B_1A_1O = \alpha$, $\angle OA_1A_2 = \beta$, $\angle B_1A_1A_2 = \gamma$ (рис. 12.3). Тогда справедливо равенство $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Доказательство этих соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

12.391. Стороны параллелограмма равны a и b ($a < b$) Меньшая диагональ составляет с меньшей стороной тупой угол, а с большей стороной — угол α. Найти большую диагональ параллелограмма.

Решение.

Если в данном параллелограмме $ABCD$ (рис. 12.4) $a = AB$, $b = BC$, $\alpha = \angle ADB$, $\beta = \angle BDC$, то по теореме синусов для ΔABD получаем

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha, \quad \cos\beta = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}}{a} \quad (\beta > 90°) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теореме косинусов

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\alpha + \beta) = a^2 + b^2 +$$
$$+2b\left(\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\sin^2\alpha\right).$$

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 + 2b\left(\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\sin^2\alpha\right)}$.

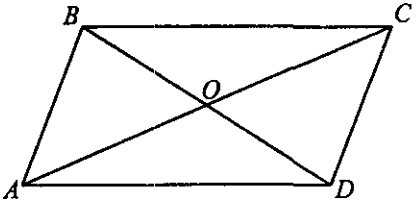


Рис. 12.4

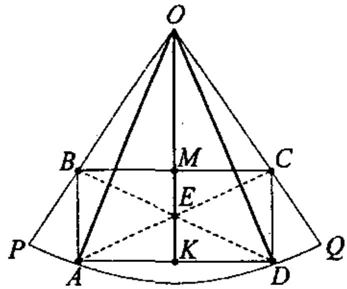


Рис. 12.5

12.392. В сектор POQ радиуса R с центральным углом α вписан прямоугольник; две его вершины лежат на дуге сектора, две другие — на радиусах PO и PQ. Найти площадь прямоугольника, если острый угол между его диагоналями равен β.

Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ (рис. 12.5) вписан в данный сектор POQ, K — середина стороны AD. Тогда $OK \perp AD$ (как радиус, проходящий через середину хорды) $\Rightarrow BM = MC$, где M — точка пересечения OK с $BC \Rightarrow \Delta OMB = \Delta OMC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOM = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow OM = BM \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}BC \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$OK = OM + MK = \frac{BC}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = OA^2 = AK^2 + OK^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + AB\right)^2.$$

Пусть E — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как $\angle CED = \angle CAD + \angle BDA = 2\angle CAD$, то $\angle CAD = \frac{\beta}{2}$ или $\angle CAD = 90° - \frac{\beta}{2}$ (в зависимости от того, острый угол CED или тупой). Если $\gamma = \angle CAD$, то $AB = CD = BC \cdot \operatorname{tg}\gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4R^2 = BC^2 + \left(BC \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2BC \cdot \operatorname{tg}\gamma\right)^2 \Rightarrow BC^2 = \frac{4R^2}{1 + \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg}\gamma\right)^2}.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = BC^2 \cdot \operatorname{tg}\gamma \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{4R^2 \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 + \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg}\gamma\right)^2}.$$

Так как $\gamma=\frac{\beta}{2}$ или $\gamma=90^\circ-\frac{\beta}{2}$, то окончательно получаем

Ответ: $\dfrac{4R^2\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}$ или $\dfrac{4R^2\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}{1+\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2}$.

12.393. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha>\gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и биссектриса BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

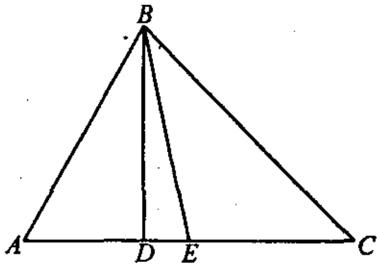


Рис. 12.6

Решение.

Если $\alpha=\angle A$, $\gamma=\angle C$, то $\angle ABD<\angle DBC\Rightarrow$ биссектриса BE лежит внутри ΔDBC (рис. 12.6).

$$\angle DBE=\angle ABE-\angle ABD=\frac{180^\circ-(\alpha+\gamma)}{2}-(90^\circ-\alpha)=\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

$$S_{BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot DE=\frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\frac{DE}{AC}=S\cdot\frac{BD\cdot\mathrm{tg}(\angle DBE)}{AC}=$$

$$=S\cdot\frac{AB\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}(\angle DBE)}{AC}=\frac{S\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

(по теореме синусов для ΔABC $\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$).

Ответ: $S\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

12.394. В сегмент окружности радиуса R вписаны две равные окружности, касающиеся друг друга, дуги сегмента и его хорды. Найти радиусы этих окружностей, если центральный угол, опирающийся на дугу сегмента, равен α ($\alpha<\pi$).

Решение.

Если B_1 и B_2 — центры окружностей радиуса x, вписанных в сегмент AC данной окружности с центром O (рис. 12.7), D_1 и D_2 — точки касания

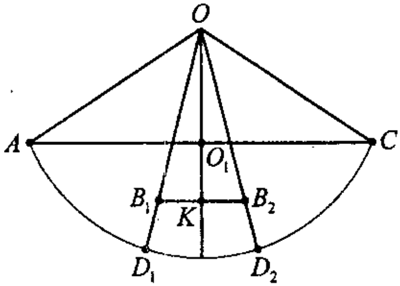


Рис. 12.7

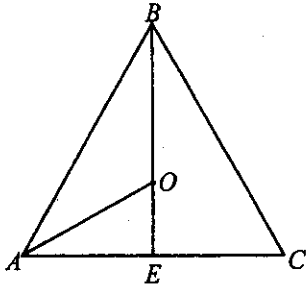


Рис. 12.8

окружностей с центрами в B_1 и B_2 с окружностью O, то $OB_1 = OB_2 = OD_1 - B_1D_1 = OD_2 - B_2D_2 = R - x$.

Так как B_1 и B_2 равноудалены от AB, то $B_1B_2 \parallel AB$.

Пусть OK — высота равнобедренного ΔOB_1B_2, пересекающая хорду AC в точке O_1. Тогда

$$AC \perp OK, O_1K = x, OO_1 = OA \cdot \cos\angle AOO_1 = R \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OB_1^2 = (R-x)^2 = B_1K^2 + OK^2 = x^2 + \left(R\cos\frac{\alpha}{2} + x\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \left(-2\cos^2\frac{\alpha}{4} + 2\cos\frac{\alpha}{4}\right) \cdot R = 4R \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{8}.$$

Ответ: $4R \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{8}$.

12.395. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около него, равно m. Найти углы треугольника и допустимые значения m.

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса r, вписанной в данный ΔABC, $\alpha = \angle A = \angle C$, R— радиус окружности, описанной около ΔABC (рис. 12.8). Если E — середина AC, то

$$r = OE = AE \cdot \text{tg}\angle OAE = \frac{AC}{2} \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2\sin 2\alpha} \Rightarrow m = \frac{r}{R} = \text{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + m = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-2m}}{2}, \alpha = \arccos\frac{1 \pm \sqrt{1-2m}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle B = 180° - 2\alpha = 2\arcsin\frac{1 \pm \sqrt{1-2m}}{2}\left(\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}\right).$$

Так как $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < \dfrac{1 \pm \sqrt{1-2m}}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < m \le \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1+\sqrt{1-2m}}{2}$, $2\arcsin\dfrac{1+\sqrt{1-2m}}{2}$ или

$$\arccos\frac{1-\sqrt{1-2m}}{2},\ 2\arcsin\frac{1-\sqrt{1-2m}}{2};\ 0 < m \le \frac{1}{2}.$$

12.396. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a > b$) и острый угол α между диагоналями. Найти углы параллелограмма.

Решение.

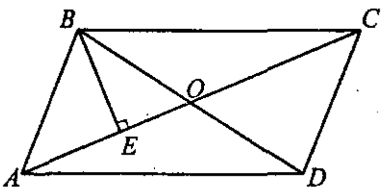


Рис. 12.9

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, $a = BC$, $b = AB$, $\alpha = \angle AOB$ (рис. 12.9). Проведем перпендикуляр BE на диагональ AC. Тогда имеем

$$BE^2 = b^2 - \left(\frac{AC}{2} - OE\right)^2 = a^2 - \left(\frac{AC}{2} + OE\right)^2 \Rightarrow 2 \cdot AC \cdot OE =$$

$$= a^2 - b^2 \Rightarrow S_{ABCD} = BE \cdot AC = OE \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot AC = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Но с другой стороны, $S_{ABCD} = a \cdot b \cdot \sin\angle A \Rightarrow \sin\angle A = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\arcsin\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\pi - \arcsin\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

12.397. В сегмент с центральным углом α вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой хорды сегмента, а две другие лежат на дуге сегмента. Высота треугольника равна h. Найти радиус дуги сегмента.

Решение.

Пусть O — центр окружности радиуса x с данным сегментом MN, $\alpha = \angle MON$, B — середина хорды MN, ΔABC — правильный треугольник с высотой h, вписанный в сегмент MN (рис. 12.10). Продолжим OB до пересечения с AC в точке E.

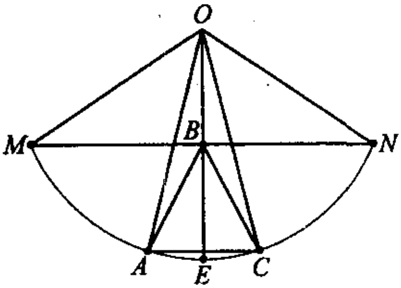


Рис. 12.10

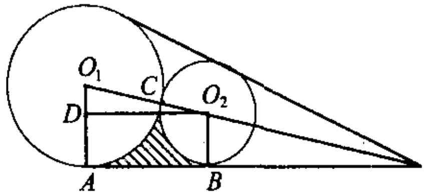


Рис. 12.11

$\Delta AOB = \Delta COB \Rightarrow OE$ — биссектриса $\angle AOC \Rightarrow OE$ — высота

$$\Delta AOC \Rightarrow x^2 = EC^2 + OE^2 = \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(h + x\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\left(EC = \frac{h}{\sqrt{3}},\ BE = h,\ OB = x\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2xh\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{3}h^2 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим подходящее значение x.

Ответ: $x = \dfrac{h}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)$.

12.398 Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно d. Угол между их общими внешними касательными равен α радианам. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком одной касательной и двумя соответствующими дугами окружностей.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 — центры двух данных окружностей радиусов x и y, касающихся в точке C, AB — их внешняя касательная, O_2D — высота трапеции AO_1O_2B (рис. 12.11). $\angle O_1O_2D = \dfrac{\alpha}{2}$ (по условию),

$$\angle AO_1C = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},\ \angle CO_2B = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_{O_1CA} = \frac{\pi x^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$S_{O_2BC} = \frac{\pi y^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow S_{O_1CA} + S_{O_2BC} = \frac{\pi}{4}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\alpha}{4}\left(x^2 - y^2\right).$$

Так как

$$x-y=O_1D=O_1O_2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}, O_2D=d\cdot\cos\frac{\alpha}{2}, d=x+y, \text{ то}$$

$$x^2-y^2=d^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2};\ x^2+y^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=\frac{d^2}{2}\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$S_{AO_1O_2B}=\frac{O_1A+O_2B}{2}\cdot O_2D=\frac{d^2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Окончательно получаем $S_{ACB}=S_{AO_1O_2B}-\left(S_{O_1CA}+S_{O_2BC}\right)$.

Ответ: $S_{ACB}=\dfrac{d^2}{8}\left(4\cos\dfrac{\alpha}{2}-\pi\left(1+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)+2a\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.399. В параллелограмме даны две стороны a и b $(a>b)$ и высота h, проведенная к большей стороне. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма.

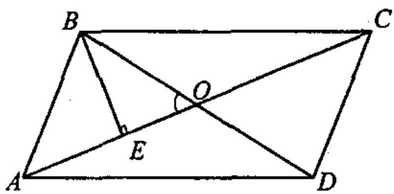


Рис. 12.12

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, $a=BC$, $b=AB$, $\alpha=\angle AOB$ (рис. 12.12). Проведем перпендикуляр BE на диагональ AC. Тогда имеем

$$BE^2=b^2-\left(\frac{AC}{2}-OE\right)^2=a^2-\left(\frac{AC}{2}+OE\right)^2\Rightarrow 2\cdot AC\cdot OE=$$

$$=a^2-b^2\Rightarrow S_{ABCD}=AC\cdot BE=AC\cdot OE\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot=\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Но $S_{ABCD}=a\cdot h\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2ah}{a^2-b^2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{2ah}{a^2-b^2}$.

12.400. Углы треугольника равны A, B и C. Высота треугольника, проходящая через вершину угла B, равна H. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Точки пересечения окружности со сторонами AB и BC треугольника соединены с концами высоты. Найти площадь построенного четырехугольника.

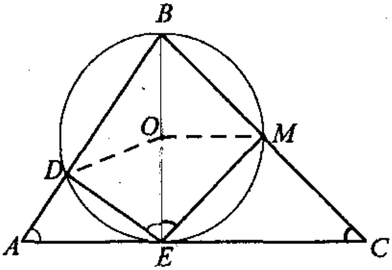


Рис. 12.13

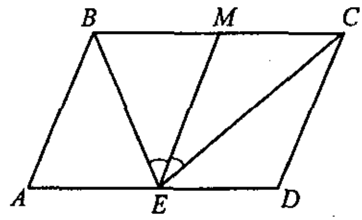


Рис. 12.14

Решение.

Если BE — высота данного ΔABC (рис. 12.13), M и D — точки пересечения окружности, имеющей диаметр BE, со сторонами AB и BC, то

$$\angle BDE = \angle BME = 90° \Rightarrow S_{MBDE} = \frac{BM \cdot ME}{2} + \frac{BD \cdot DE}{2} =$$

$$= \frac{BE^2}{2} \cdot \sin(90°-A) \cdot \cos(90°-A) + \frac{BE^2}{2} \cdot \sin(90°-C) \cdot \cos(90°-C) =$$

$$= \frac{H^2}{4}(\sin 2A + \sin 2C) = \frac{H^2}{2}\cos(A-C) \cdot \sin(A+C) =$$

$$= \frac{H^2}{2}\cos(A-C)\sin B.$$

Ответ: $\frac{H^2}{2}\cos(A-C)\sin B$.

12.401. Стороны параллелограмма равны a и b ($a < b$). Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом α. Найти площадь параллелограмма.

Решение.

Пусть E — середина стороны AD данного параллелограмма $ABCD$ (рис. 12.14), $AB = a$, $BC = b$, $\alpha = \angle BEC$. Проведем среднюю линию ME параллелограмма.

Тогда $4 \cdot ME^2 = 4a^2 = 2(BE^2 + CE^2) - b^2$ (формула медианы треугольника). Далее, $BE^2 + CE^2 = b^2 + 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\alpha$ (теорема косинусов для ΔBCE) $\Rightarrow BE \cdot CE = \frac{4a^2 - b^2}{4\cos\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{BCE} = BE \cdot CE \cdot \sin\alpha = \frac{4a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{4a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

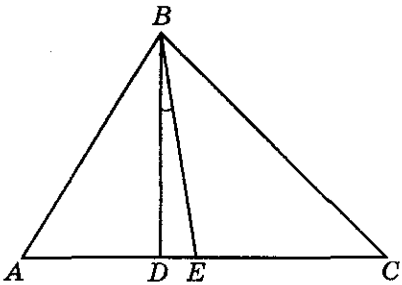


Рис. 12.15

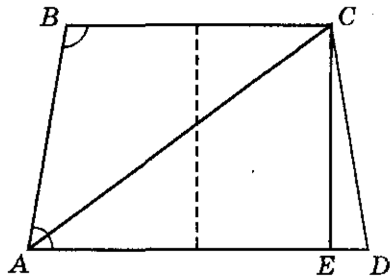


Рис. 12.16

12.402. В треугольнике даны две стороны a и $b (a > b)$ и площадь S. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к третьей стороне.

Решение.

Если в данном ΔABC $a = BC$, $b = AB$, BD — высота, BE — медиана (рис. 12.15), то

$$BD^2 = AB^2 - \left(\frac{AC}{2} - DE\right)^2 = BC^2 - \left(\frac{AC}{2} + DE\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2 \cdot AC \cdot DE \Rightarrow a^2 - b^2 = 2 \cdot AC \cdot BD \cdot \operatorname{tg} \angle DBE =$$

$$= 4S \cdot \operatorname{tg} \angle DBE \Rightarrow \angle DBE = \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2 - b^2}{4S}\right).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{a^2 - b^2}{4S}\right)$.

12.403. Отношение радиуса круга, описанного около трапеции, к радиусу круга, вписанного в нее, равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

Решение.

Если r — радиус окружности, впмсанной в данную трапецию $ABCD$ (рис. 12.16) ($BC \| AD$), R — радиус окружности, описанной около $ABCD$, CE — высота трапеции, $\alpha = \angle ADC$, то трапеция $ABCD$ — равнобедренная, $CE = 2r$, $CD = \frac{2r}{\sin\alpha}$, $AB = \frac{BC + AD}{2} \Rightarrow AB = AE = \frac{2r}{\sin\alpha}$. По теореме синусов для ΔACD

$$AC = 2R\sin\alpha \Rightarrow AC^2 = 4R^2\sin^2\alpha =$$

$$= AE^2 + CE^2 = 4r^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) \Rightarrow k^2\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}},$$

$$\text{при } 0 < \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+4k^2} < 2k^2 - 1 \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1+4k^2 < \left(2k^2-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow k > \sqrt{2}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}$ при $k > \sqrt{2}$.

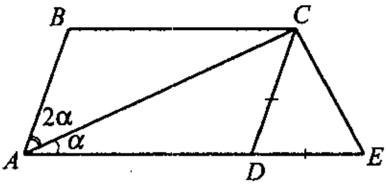


Рис. 12.17

12.404. Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k. Найти углы параллелограмма, если известно, что большая диагональ делит угол параллелограмма в отношении 1 : 2.

Решение.

Пусть AC — большая диагональ данного параллелограмма $ABCD$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAC = 2\alpha$ (рис. 12.17). Продолжим сторону AD на длину отрезка ED, равного CD.

$$\angle AEC = \angle DCE = \frac{\angle ADC}{2} = \frac{180^\circ - 3\alpha}{2} \Rightarrow \angle ACE = \frac{180^\circ + \alpha}{2}.$$

По теореме синусов для ΔACE

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD+DC}{AC} = \frac{k}{2} = \frac{\sin\angle ACE}{\sin\angle AEC} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{k} + 3 \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{2}{k} + 1 \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2+k}{2k},$$

$\angle A = 3\alpha$, $\angle B = \pi - 3\alpha$.

Ответ: $3\arccos\frac{2+k}{2k}$, $\pi - 3\arccos\frac{2+k}{2k}$.

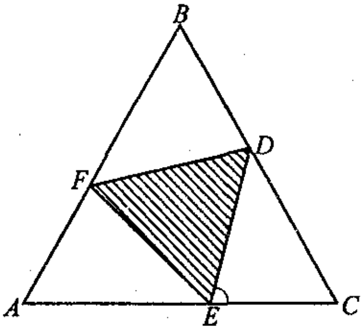


Рис. 12.18

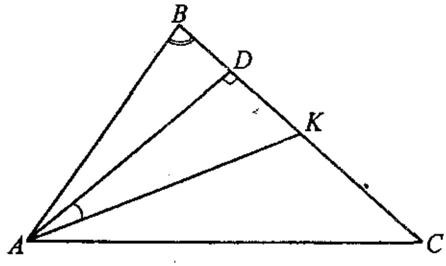


Рис. 12.19

12.405. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF, точка D лежит на стороне BC, точка E — на стороне AC и точка F — на стороне AB. Сторона AB относится к стороне DF как $8:5$. Найти синус угла DEC.

Решение.

Если $\alpha = \angle DEC$, то $\angle EDC = 120° - \alpha$, $\angle FDB = 180° - (60° + \angle EDC) = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta EDC = \Delta FBD$, $EC = BD$ (рис. 12.18).

По теореме синусов для

$$\Delta EDC \quad \frac{EC}{\sin(120°-\alpha)} = \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{ED}{\sin 60°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = EC + DC = \frac{ED}{\sin 60°}\left(\sin\left(120° - \alpha\right) + \sin\alpha\right) = 2ED\cos\left(60° - \alpha\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(60° - \alpha) = \frac{BC}{2 \cdot ED} = \frac{4}{5},\ \sin(60° - \alpha) = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha + \sqrt{3}\cdot\sin\alpha = \dfrac{8}{5}, \\ \sqrt{3}\cdot\cos\alpha - \sin\alpha = \pm\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}\pm 3}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{3}\pm 3}{10}$.

12.406. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне равнобедренного треугольника, равен $1/2$. Найти синус угла при вершине.

Решение.

Если AK и AD — медиана и высота данного ΔABC ($AB = BC$) (рис. 12.19), то $\sin\angle B = \frac{AD}{AB}$, $AB^2 = AD^2 + BD^2$, $BD = |BK \pm DK|$ (знаки зависят от расположения точки D относительно точек B и K),

$$DK = AD \cdot \operatorname{tg}\angle DAK = \frac{AD}{2},\ BK = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB^2 = AD^2 + \left|\frac{AB}{2} \pm \frac{AD}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \pm 2\left(\frac{AD}{AB}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2\angle B \pm 2\sin\angle B - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\angle B = 1, \\ \sin\angle B = \frac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: 1 или $\frac{3}{5}$.

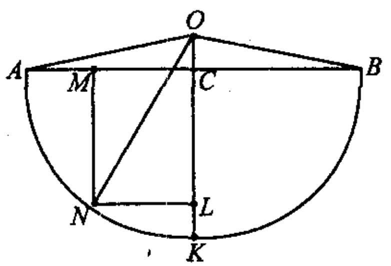


Рис. 12.20

12.407. Прямая, перпендикулярная хорде сегмента делит хорду в отношении 1 : 4, а дугу — в отношении 1 : 2. Найти косинус центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Решение.

Пусть O — центр круга радиуса R, содержащего сегмент AB (рис. 12.20), $\cup AN : \cup NB = 1:2$, $AM : MB = 1:4$, $MN \perp AB$. Проведем радиус $OK \perp AB$ (C — точка пересечения OK и AB). Так как хорда AB и дуга AB делятся радиусом OK на равные части , то

$$MC : AC = 1{,}5 : 2{,}5;\quad \cup AN : \cup NK = 1 : 0{,}5;\quad \angle NOK = \frac{1}{6}\angle AOB.$$

Проведем перпендикуляр NL на OK. Если $\alpha = \angle NOK$, то

$$\sin\alpha = \frac{NL}{ON} = \frac{MC}{R},\quad \sin 3\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{R} \Rightarrow \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\angle AOB = \cos 6\alpha = 4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha = -\frac{23}{27}.$$

Ответ: $-\frac{23}{27}$.

12.408. В остроугольном треугольнике ABC со стороной AC (рис. 12.21), равной b, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ радиан. Через ортоцентр (точку пересечения высот) и основания высот, опущенных на стороны AB и BC, проведена окружность. Найти площадь общей части треугольника и круга.

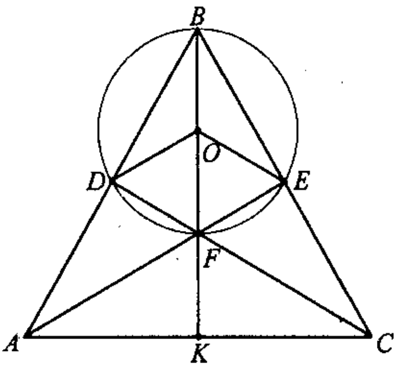


Рис. 12.21

Решение.

Если F — ортоцентр данного ΔABC, а AE, CD — его высоты, то окружность, проведенная через точки F, E, D, пройдет через вершину B и BF — диаметр этой окружности ($\angle BDF = 90°$). Пусть O — центр окружности, x — ее радиус. Так как $\angle DOE = 2\beta$ (центральный угол, опирающийся на $\smile DE$, равную 2β), то площадь S_c сектора DOE равна $x^2\beta$.

$$S_{BOD} = \frac{1}{2}S_{BFD} = \frac{BD\cdot FD}{4} = \frac{BF^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{4} = \frac{x^2}{2}\cdot\sin\alpha$$

$(\angle DBF = 90° - \alpha)$,

$$S_{BOE} = \frac{1}{2}S_{BFE} = \frac{BE\cdot FE}{4} = -\frac{BF^2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{4} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\ (\angle FBE = 90° - \angle C = \alpha+\beta-90°).$$

Таким образом, площадь общей части круга и ΔABC равна

$$S_c + S_{BOD} + S_{BOE} = x^2(\beta - \sin\beta\cdot\cos(2\alpha+\beta)).$$

Далее, имеем

$$\Delta ADC \sim \Delta BFD \Rightarrow \frac{BF}{AC} = \frac{BD}{CD} = \text{ctg}\beta \Rightarrow x = \frac{1}{2}b\cdot\text{ctg}\beta.$$

Подставляя найденное значение x в формулу площади, получаем

Ответ: $\frac{1}{4}b^2\text{ctg}^2\beta(\beta - \sin\beta\cdot\cos(2\alpha+\beta))$.

12.409. В остроугольном треугольнике ABC известны углы. Найти отношение, в котором ортоцентр (точка пересечения высот) делит высоту, проведенную из вершины угла A.

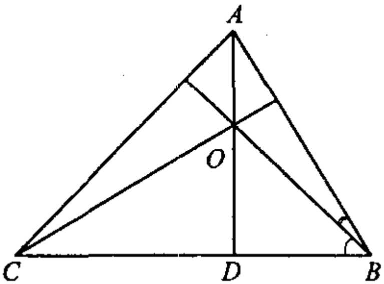


Рис. 12.22

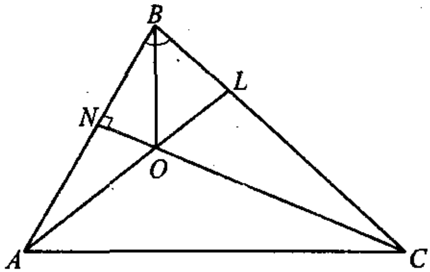


Рис. 12.23

Решение.

Если O — ортоцентр данного ΔABC, AD — его высота (рис. 12.22), то

$$S_{OBD}=\frac{BD\cdot BO}{2}\cdot\sin(\angle OBD),\ S_{OBA}=\frac{AB\cdot BO}{2}\cdot\sin(\angle OBA),$$

$$\angle OBD=90^\circ-\angle C,\ \angle OBA=90^\circ-\angle A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{S_{OBA}}{S_{OBD}}=\frac{AB}{BD}\cdot\frac{\cos\angle A}{\cos\angle C}=\frac{\cos\angle A}{\cos\angle B\cdot\cos\angle C}.$$

Окончательно, $\dfrac{S_{OBA}}{S_{OBD}}=\dfrac{AO}{OD}$.

Ответ: $\dfrac{\cos\angle A}{\cos\angle B\cdot\cos\angle C}$.

12.410. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AL и CN. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, L, N, если $AC=a$, $\angle ABC=\alpha$.

Решение.

Если O — ортоцентр данного ΔABC, то окружность, проходящая через точки B, N, L, пройдет через O, и BO — ее диаметр ($\angle BNO=90^\circ$) (рис. 12.23). Искомый радиус равен

$$\frac{BO}{2}.\ \Delta ANC\sim\Delta BNO\Rightarrow\frac{BO}{AC}=\frac{NO}{AN}=\operatorname{tg}\angle NAO=\operatorname{tg}(90^\circ-\angle B)=\operatorname{ctg}\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{BO}{2}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

12.411. Доказать, что отношение площади любого треугольника к площади описанного около него круга меньше 2/3.

Решение.

Обозначим стороны и углы ΔABC через a, b, c и α, β, γ; R— радиус описанного круга.

Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \text{ (по тереме синусов)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{\pi R^2}=\frac{2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\pi}<\frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать.

12.412. Для остроугольного треугольника образованы три числа, выражающие отношения длин его сторон к соответствующим расстояниям от них до центра описанной окружности. Доказать, что сумма этих чисел в 4 раза меньше их произведения.

Решение.

Пусть O — центр окружности, описанной около остроугольного ΔABC (рис. 12.24) (O лежит внутри ΔABC, так как все его углы острые), OK, OM, OL — перпендикуляры, проведенные из O на стороны ΔABC.

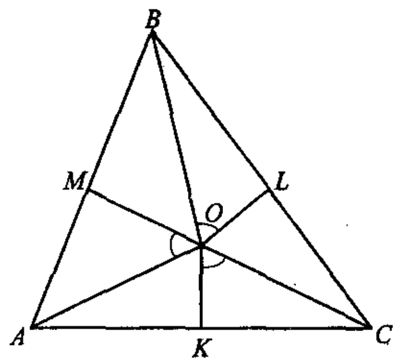


Рис. 12.24

Возьмем $\alpha=\angle AOM$, $\beta=\angle BON$, $\gamma=\angle COK$. Тогда

$$\frac{AB}{OM}=\frac{2\cdot AM}{OM}=2\operatorname{tg}\alpha,\ \frac{BC}{ON}=2\operatorname{tg}\beta,\ \frac{AC}{OK}=2\operatorname{tg}\gamma.$$

По условию требуется доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\Leftrightarrow-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\gamma\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\gamma$. $\alpha+\beta+\gamma=180°$ (OM, ON, OK— биссектрисы равнобедренных $\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OAC$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(180°-\alpha-\beta)=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

что и требовалось доказать.

12.413. Длины четырех дуг, на которые разбита вся окружность радиуса R, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 3. Точки деления служат вершинами четырехугольника, вписанного в эту окружность. Найти его площадь.

Решение.

Пусть точки A, B, C, D разбивают данную окружность с центром O и радиусом R так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 1:3:9:27$.

Если $\alpha = \angle AOB$, то

$$\angle BOC = 3\alpha, \angle COD = 9\alpha, \angle DOA = 27\alpha \Rightarrow \alpha = 9^\circ.$$

Далее,

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} =$$

$$= \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha + \frac{1}{2}R^2 \sin 3\alpha + \frac{1}{2}R^2 \sin 9\alpha + \frac{1}{2}R^2 \sin 27\alpha =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left((\sin 9^\circ + \sin 81^\circ) + (\sin 27^\circ + \sin 243^\circ)\right) =$$

$$= R^2(\sin 45^\circ \cdot \cos 36^\circ + \sin 135^\circ \cdot \cos 108^\circ) = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}(\cos 36^\circ + \cos 108^\circ).$$

$$\cos 36^\circ + \cos 108^\circ = \frac{2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ + 2\sin 36^\circ \cdot \cos 108^\circ}{2\sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ - \sin 72^\circ + \sin 114^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$.

12.414. Один из плоских углов трехгранного угла равен α. Двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны β и γ. Найти два других плоских угла.

Решение.

Пусть плоский $\angle E_2FE_3$ данного трехгранного угла $FE_1E_2E_3$ равен α. Из любой точки A луча FE_1 проведем перпендикуляры: AO — на плоскость E_2FE_3, AB и AC — на лучи FE_3 и FE_2 (рис. 12.25).

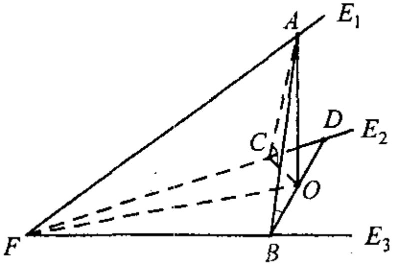


Рис. 12.22

Тогда $OB \perp FE_3$, $OC \perp FE_2 \Rightarrow \angle ABO = \beta$, $\angle ACO = \gamma$ (по условию). Продолжим BO до пересечения с FE_2 в точке D.

Тогда

$$FB = BD \cdot \operatorname{ctg}\alpha = (OB + OD)\operatorname{ctg}\alpha = \left(OB + \frac{OC}{\cos\alpha}\right) \cdot \operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= \left(OA \cdot \operatorname{ctg}\beta + \frac{OA \cdot \operatorname{ctg}\gamma}{\cos\alpha}\right) \cdot \operatorname{ctg}\alpha = AB \cdot \sin\beta\left(\operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\cos\alpha}\right) \cdot \operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}(\angle AFB) = \frac{FB}{AB} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\beta\left(\operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\cos\alpha}\right).$$

Аналогично, $\operatorname{ctg}(\angle AFC) = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\gamma\left(\operatorname{ctg}\gamma + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}\right)$. Окончательно получаем

Ответ: $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\beta\left(\operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\cos\alpha}\right)\right)$;

$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\gamma\left(\operatorname{ctg}\gamma + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}\right)\right)$.

12.415. В основании пирамиды лежит квадрат. Углы, которые образуют боковые грани с основанием, относятся как 1 : 2 : 4 : 2. Найти эти углы.

Решение.

Если EO — высота данной пирамиды $EABCD$, EM, EN, EL, EK — апофемы граней, то $NK \perp BC$, $ML \perp AB$ (рис. 12.26). Следовательно, обозначив $\alpha = \angle EMO$, получаем:

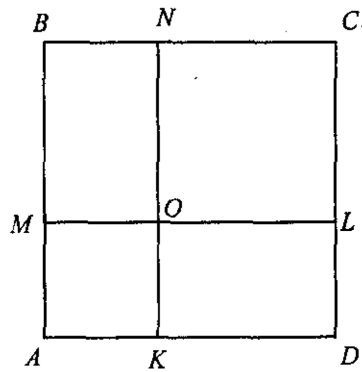


Рис. 12.26

$\angle ELO = 4\alpha, \angle ENO = \angle EKO = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{OM}{OE}, \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{ON}{OE},$

$\operatorname{ctg}4\alpha = \frac{OL}{OE} \Rightarrow 2\operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}4\alpha$ $(2 \cdot ON = OM + OL = a$, где a — сторона квадрата $ABCD) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}4\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3}.$

Ответ: $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}.$

12.416. В конус вложен шар так, что их поверхности касаются. Объем тела, заключенного между ними, в 8 раз меньше объема шара. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

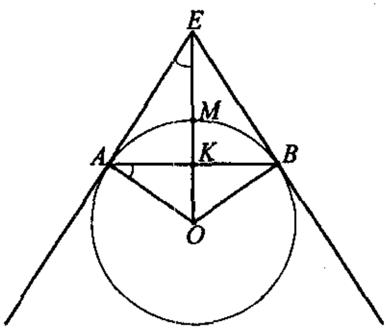


Рис. 12.27

Решение.

Рассмотрим осевое сечение данного конуса: если O — центр вложенного шара радиуса R, A, B — точки касания (в осевом сечении), M и K — точки пересечения с окружностью O и хордой AB, E — вершина конуса, $\alpha = \angle AEO$ (рис. 12.27), то объем V_Φ тела Φ, заключенного между поверхностями конуса и шара, равен сумме объемов двух конусов $\Phi_1 = EAB$, и $\Phi_2 = OAB$ без объема V_C шарового сектора $OAMB$.

По формулам объемов получаем:

$$V_C = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot MK,\ V_{\Phi_1} = \frac{1}{3}\pi \cdot AK^2 \cdot EK,\ V_{\Phi_2} = \frac{1}{3}\pi \cdot AK^2 \cdot OK.$$

Далее,

$$AK = R \cdot \cos\angle OAK = R \cdot \cos\alpha,\ MK = R - OK = R - R\sin\alpha,$$

$$EK + OK = EO = \frac{R}{\sin\alpha} \Rightarrow V_\Phi = V_{\Phi_1} + V_{\Phi_2} - V_C =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AK^2 (EK + OK) - \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot MK = \frac{\pi R^3}{3}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - 2(1 - \sin\alpha)\right) =$$

$$= [\text{по условию задачи}] = \frac{1}{6}\pi R^3 \Rightarrow 2\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{6}, \angle AFB = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

12.417. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. К шару проведена параллельно основанию пирамиды касательная плоскость, которая делит объем пирамиды в отношении $m : n$, считая от вершины. Найти угол между высотой пирамиды и ее боковой гранью.

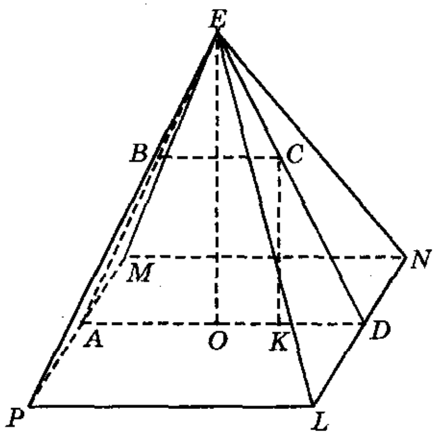


Рис. 12.28

Решение.

Пусть A и D — середины ребер ME и NL основания данной правильной пирамиды $EPMNL$, BC — линия пересечения AED с данной плоскостью, касательной к шару, вписанному в пирамиду, O — проекция вершины E на основание (рис. 12.28). $NL \perp AD \Rightarrow NL \perp ED \Rightarrow NL \perp AED \Rightarrow AED \perp ENL \Rightarrow$ угол между EO и боковой гранью ENL будет равен $\angle OED$ (так как проекция точки O на ENL лежит на апофеме ED). $BC \| AD \Rightarrow ABCD$ — равнобедренная трапеция, в которую можно вписать круг (сечение шара плоскостью AED). Если CK — высота трапеции $ABCD$, то

$$KD = \frac{1}{2}(AD - BC),\ CD = \frac{1}{2}(BC + AD) \Rightarrow \sin\angle OED = \sin\angle KCD =$$

$$= \frac{KD}{CD} = \frac{AD - BC}{AD + BC} = \left(\frac{AD}{BC} - 1\right) : \left(\frac{AD}{BC} + 1\right).$$

Но $\frac{AD}{BC} = \sqrt[3]{\frac{m+n}{m}}$, так как объемы необходимых пирамид пропорциональны кубам соответствующих ребер $\Rightarrow \sin\angle OED = \frac{\sqrt[3]{m+n} - \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt[3]{m+n} - \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m}}$.

12.418. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположной боковой грани и параллельно противоположной стороне основания. Эта плоскость составляет с плоскостью основания пирамиды угол α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

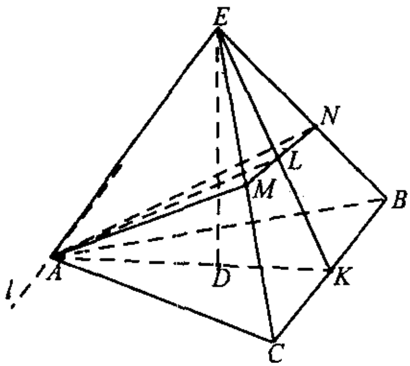


Рис. 12.29

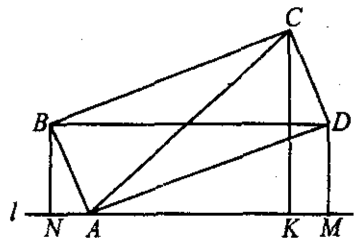


Рис. 12.30

Решение.

Если $EABC$ — данная правильная пирамида, D — центр основания, плоскость $AMN \perp EBC$, то по условию $AMN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC$ (рис. 12.29). Линия l пересечения AMN и ABC (проходящая через точку А) также параллельна BC. Пусть K — середина BC, L — точка пересечения MN и FK. Так как AL — медиана равнобедренного ΔAMN, то $AL \perp MN$ ($EM = EN$, так как $MN \| BC$) $\Rightarrow l \perp AK$. $BC \perp AK \Rightarrow l \perp AK$, следовательно, $\angle LAK$ и есть угол между плоскостями AMN и $ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle LAK = \angle OEK = \alpha \Rightarrow EK = \frac{OK}{\sin\alpha} = \frac{BC}{2\sqrt{3}\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\sin\alpha = \frac{BC}{2 \cdot EK} = \operatorname{tg}\angle CEK \Rightarrow \angle CEB = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\sin\alpha\right).$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot\sin\alpha\right)$.

12.419. Прямоугольник вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали Найти поверхность тела вращения, если площадь прямоугольника равна S, а угол между диагоналями равен α.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник, который вращается вокруг прямой l, $l \| BD$ (рис. 12.30). Поверхность тела вращения Φ равна сумме поверхностей двух конусов с осью l и образующими BA и AD, а также двух усеченных конусов с осью l и образующими BC и CD. Проведем перпендикуляры BN, CK, DM на прямую l. Тогда площадь S_Φ поверхности тела Φ равна:

$$S_\Phi = \pi \cdot AB \cdot BN + \pi \cdot AD \cdot DM + \pi \cdot BC(BN + CK) + \pi \cdot CD(DM + CK).$$

Далее, $BN = DM$, $AB = CD$, $AD = BC$ и $CK = 2 \cdot DM$, так как BD — средняя линия ΔACK и, следовательно, делит CK пополам $\Rightarrow$ $\Rightarrow S_\Phi = 4\pi(AB + AD) \cdot DM$,

$$(AB + AD)^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD = BD^2 + 2S;$$

$$\frac{1}{2} DM \cdot BD = S_{ABD} = \frac{S}{2} \Rightarrow DM = \frac{S}{BD};$$

$$S = \frac{1}{2} BD^2 \sin\alpha \Rightarrow \frac{2S}{BD^2} = \sin\alpha.$$

Окончательно получаем:

$$S_\Phi = 4\pi \frac{S}{BD} \sqrt{BD^2 + 2S} = 4\pi S \sqrt{1 + \frac{2S}{BD^2}} =$$

$$= 4\pi S \sqrt{1 + \sin\alpha} = 4\sqrt{2}\pi S \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $4\sqrt{2}\pi S \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

12.420. Найти радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

Решение.

Пусть O — центр шара, касающегося боковых ребер EA, EB, EC и основания данной правильной пирамиды $EABC$ в точках M, N, K и F соответственно (рис. 12.31).

$\Delta OAM = \Delta OBN = \Delta OCK \Rightarrow$ $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow F$ — центр основания ABC.

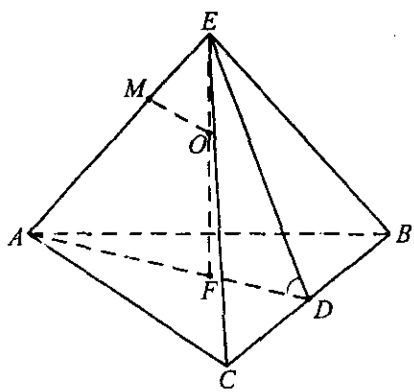


Рис. 12.31

Если D — середина BC, то $BC \perp AD$, $BC \perp EL \Rightarrow \angle ADE = \alpha$ (по условию). Возьмем $\angle EAD = 2\beta$.

Тогда

$$EF = AF \cdot \mathrm{tg}2\beta = FD \cdot \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow 2\mathrm{tg}2\beta = \mathrm{tg}\alpha \left(AF = 2 \cdot FD\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\beta + 4\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\beta = -2\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{4\mathrm{ctg}^2\alpha + 1} \Rightarrow OF = AF \cdot \mathrm{tg}\beta =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{3}\left(-2\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{4\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}\right)$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(-2\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{4\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}\right)$.

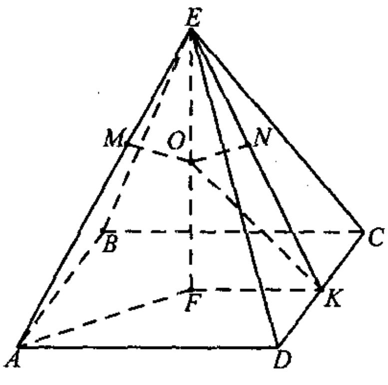


Рис. 12.32

12.421. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найти расстояние от центра шара, вписанного в эту пирамиду, до бокового ребра.

Решение.

Если O — центр шара, вписанного в данную правильную пирамиду $EABCD$, а F и N — точки касания шара с гранями, то по свойствам правильной пирамиды получаем, что F — центр основания $ABCD$ (рис. 12.32) и если K — середина CD, то $CD \perp FK$, $CD \perp EK \Rightarrow \Rightarrow CD \perp EKF \Rightarrow EKF \perp ECD \Rightarrow N$ лежит на EK,

$$\angle EKF = \alpha, \angle OKF = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow OF = ON = FK \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, EO = \frac{ON}{\cos\alpha} =$$

$$= FK \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}, EK = \frac{FK}{\cos\alpha}, ED^2 = EK^2 + KD^2 = FK^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1\right).$$

Проведем перпендикуляр OM на EA. $\Delta EOM \sim \Delta EFA \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{MO}{AF} = \frac{EO}{AE}$. Так как $AE = ED, AF = \frac{a}{\sqrt{2}}, FK = \frac{a}{2}$, то окончательно получаем

Ответ: $MO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

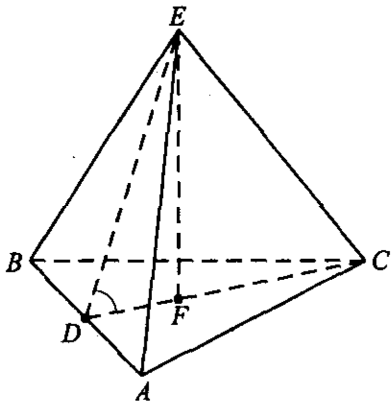


Рис. 12.33

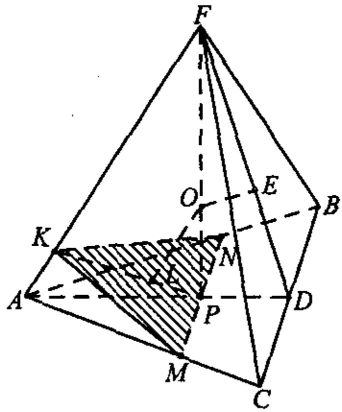


Рис. 12.34

12.422. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через ее боковое ребро и высоту В сечении образовался треугольник с углом $\frac{\pi}{4}$ при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

Решение.

Пусть EF — высота данной правильной пирамиды $EABC$, D — точка пересечения плоскости ECF с ребром AB (рис. 12.33). D — середина AB (CD проходит через центр ΔABC) $\Rightarrow \angle EDC$ — искомый угол. Если $\alpha = \angle EDC$, то $\angle ECF = 135° - \alpha$ (по условию),

$$EF = FK \cdot \operatorname{tg}\alpha = FC \cdot \operatorname{tg}(135° - \alpha) \Rightarrow 2\operatorname{tg}(135° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \; (FC = 2FK) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

12.423. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. В пирамиду вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр основания пирамиды и перпендикулярной ее боковому ребру.

Решение.

Если FP — высота данной правильной пирамиды $FABC$, O — центр вписанного в нее шара, KNM — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через P и перпендикулярной ребру FA (рис. 12.34), то $MN \perp FA \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \perp AP, FPK \perp KNM \Rightarrow$ перпендикуляр OL, проведенный из O на плоскость KNM, находится в плоскости FPK. Далее, $MN \perp KP$, так как $MN \perp FP$. Значит L — центр искомого круга, являющегося сечением вписанного шара плоскостью KNM, LP — его радиус. $OL \parallel FA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{LP}{KP} = \frac{OP}{FP}.$$

Пусть D — середина BC. Тогда радиус OE вписанного шара лежит в плоскости AFD, так как $AFD \perp FBC$. Следовательно, OD — биссектриса

$\Delta FDP \Rightarrow \dfrac{OP}{OF+OP} = \dfrac{PD}{FD+PD} \Rightarrow LP = KP \cdot \dfrac{OP}{FP} = \dfrac{KP \cdot PD}{FD+PD}$. Так как $KP^2 = AK \cdot KF$, то

$$AK = AM \cdot \cos\angle FAC = \frac{2}{3} a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, KF = FA - AK, FA = FC = \frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$FD = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}; PD = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow KP^2 = \frac{a^2}{9}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LP^2 = \frac{KP^2 \cdot PD^2}{(PD+FD)^2} = \frac{a^2\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{9\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2\left(3\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{9\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2\left(\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{9\left(\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{9} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\pi \cdot LP^2 = \dfrac{\pi a^2}{9} \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)}$

12.424. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого одна сторона равна a, а каждая из остальных трех сторон равна b. Вершина пирамиды лежит на середине одной из образующих. Найти объем пирамиды, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

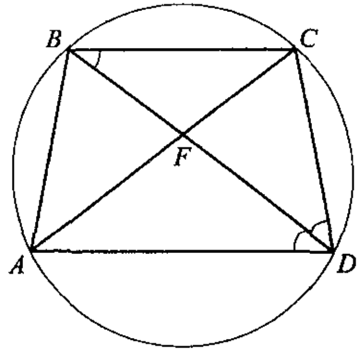


Рис. 12.35

Решение.

Пусть в основании данной пирамиды $EABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, вписанный в круг радиуса R, являющийся основанием данного конуса (рис. 12.35), $AB = BC = CD = b$, $AD = a$, F — точка пересечения диагоналей AC и BD. Возьмем $\angle ADF = \beta$. Тогда

$$\angle FDC = \angle FBC = \beta \Rightarrow AD \parallel BC,\ \angle B = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin 2\beta + \frac{1}{2}b^2 \sin 2\beta.$$

Но

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin\angle AFD = \frac{(AC)^2}{2}\sin 2\beta$$

$$(AC = BD,\ \angle AFD = 180^\circ - 2\beta) \Rightarrow AC = \sqrt{b^2 + ab}.$$

По теореме синусов для ΔACD, $R = \dfrac{AC}{2\sin 2\beta}$.

Из условия задачи очевидно, что высота пирамиды равна половине высоты конуса, т. е. равна $\frac{1}{2}R\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{EABCD} = \frac{1}{6}R\operatorname{ctg}\alpha \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AC}{2\sin 2\beta} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{(AC)^2}{2} \cdot \sin 2\beta.$$

Ответ: $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{24}\left(b^2 + ab\right)^{\frac{3}{2}}$.

12.425. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

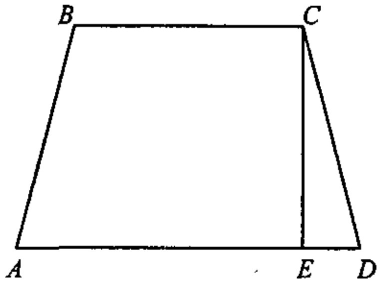


Рис. 12.36

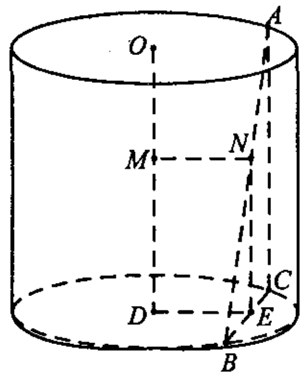


Рис. 12.37

Решение.

Пусть $ABCD$ — осевое сечение данного усеченного конуса (рис. 12.36). Тогда $ABCD$ — равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность радиуса R (R — радиус шара, вписанного в данный конус).

Если $BC = 2r_1$, $AD = 2r_2$, CE — высота $ABCD$, то

$$CD = r_2 + r_1,\ ED = r_2 - r_1 \Rightarrow 2R = CE = \sqrt{CD^2 - ED^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Так как объем данного усеченного конуса равен $\frac{\pi}{3} \cdot CE\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$, то

$$k = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{2R^2} = \frac{(r_2 - r_1)^2 + 3R^2}{2R^2} = 2\left(\frac{r_2 - r_1}{2R}\right)^2 + \frac{3}{2} = 2\operatorname{ctg}^2(\angle CDE) + \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\angle CDE) = \frac{2}{\sqrt{2k-3}} \text{ при } k > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2k-3}}$ при $k > \frac{3}{2}$.

12.426. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Отрезок AB, соединяющий точку A окружности верхнего основания с точкой B окружности нижнего основания цилиндра, равен a и отстоит от оси цилиндра на расстояние b. Найти угол между прямой AB и плоскостью основания цилиндра.

Решение.

Пусть OD — ось данного цилиндра, M и N — середины OD и AB, AC — образующая цилиндра (рис. 12.37). В ΔABC проведем линию NE. Тогда $DE \perp BC$ (по свойству хорды и радиуса, проведенного через ее середину) $\Rightarrow$ $\Rightarrow DE \perp AB$. Далее, $NE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}OD = MD$ и $NE \parallel MD \Rightarrow MNED$ — прямоугольник, т. е. MN общий перпендикуляр прямых AB и $OD \Rightarrow MN = DE = b$.

По условию

$$DC=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}\cdot\sin\angle ABC;\ EC=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}\cdot\cos\angle ABC\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=DE^2=DC^2-EC^2=-\frac{a^2}{4}\cos(2\angle ABC)\Rightarrow\cos(2\angle ABC)=-\frac{4b^2}{a^2}.$$

Ответ: $\angle ABC=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4b^2}{a^2}\right)$.

12.427. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Площадь сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

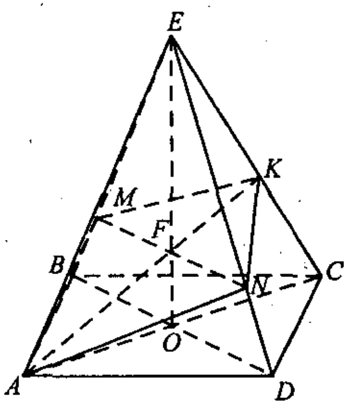


Рис. 12.38

Решение.

Пусть EO — высота данной правильной пирамиды. В ΔACE проведем высоту AK, затем через точку пересечения F с высотой EO проведем отрезок $MN \parallel BD$ (рис. 12.38). Так как $EC\perp BD$, то $EC\perp MN$. Далее $EC\perp AK$ (по построению), $EC\perp AMKN$, следовательно, $AMKN$ — искомое сечение.

$$EA\perp MN\Rightarrow MN\perp AK\Rightarrow S_{AMNK}=\frac{1}{2}MN\cdot AK.$$

Пусть $a=AO$, $\angle ECO=\alpha$. Тогда

$$AK=2a\cdot\sin\alpha,\ FO=a\cdot\operatorname{tg}\alpha;\ FO=a\cdot\operatorname{tg}\angle FAO=a\cdot\operatorname{ctg}\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF=EO-FO=a(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha).\ \Delta EMN\sim\Delta EBD\Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN=BD\cdot\frac{EF}{EO}=\frac{2a(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha};\ S_{AMKN}=-\frac{2a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Далее, имеем

$$S_{ABCD}=2S_{AMKN}=2a^2\Rightarrow -2\cos 2\alpha=\sin\alpha\Rightarrow 4\sin^2\alpha-\sin\alpha-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

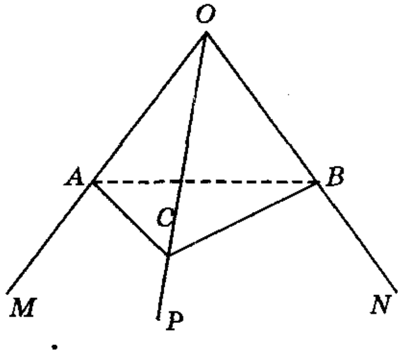


Рис. 12.39

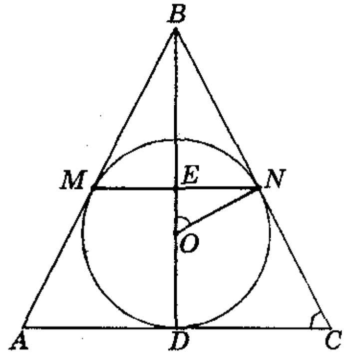


Рис. 12.40

12.428. Даны три попарно взаимно перпендикулярных луча OM, ON и OP. На луче OM взята точка A на расстоянии OA, равном a; на лучах ON и OP взяты соответственно точки B и C так, что угол ABC равен α, а угол ACB равен β. Найти OB и OC.

Решение.

Если $x = OB$, $y = OC$ (рис. 12.39), то $AB^2 = a^2 + x^2$, $AC^2 = a^2 + y^2$, $BC^2 = x^2 + y^2$. По теореме синусов для ΔABC имеем:

$$\frac{a^2+y^2}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2+x^2}{\sin^2\beta} = \frac{x^2+y^2}{\sin^2(\alpha+\beta)} \Rightarrow \frac{a^2+y^2}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2-y^2}{\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+y^2}{\sin\alpha} = \frac{a^2-y^2}{\sin(\alpha+2\beta)} \Rightarrow y^2 = a^2 \cdot \frac{\sin\alpha + \sin(\alpha+2\beta)}{\sin\alpha - \sin(\alpha+2\beta)} =$$

$$= a^2(-\operatorname{ctg}\beta)\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Аналогично, $x^2 = a^2(-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

Ответ: $a\sqrt{(-\operatorname{ctg}\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$, $a\sqrt{(-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$.

12.429. В конус вписан шар. Плоскость, содержащая окружность касания шаровой и конической поверхностей, делит объем шара в отношении 5 : 27. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

Решение.

Пусть ABC — осевое сечение данного конуса, O — центр вписанного в него шара радиуса R, M и N — точки касания шара с образующими конуса BA и BC, E — точка пересечения MN и OB (рис. 12.40). Тогда окружность касания шаровой и конической поверхностей с диаметром MN делит шар на два сегмента, где объем V верхнего сегмента равен

$\pi h^2\left(R^2-\frac{1}{3}h\right)$, а $h=R-OK$ — высота сегмента. Если $\angle BCA=\alpha$, то

$$\angle BON=\alpha,\ h=R-R\cos\alpha\Rightarrow V=\frac{\pi R^3}{3}(1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha).$$

По условию, $\left(\frac{4}{3}\pi R^3-V\right)$:

$$V=27:5\Rightarrow(1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)=\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2\cos\alpha-1)\left(4\cos^2\alpha+2\cos\alpha-11\right)=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

12.430. Поверхность шара, вписанного в правильную усеченную треугольную пирамиду, относится к полной поверхности пирамиды как $\pi:6\sqrt{3}$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

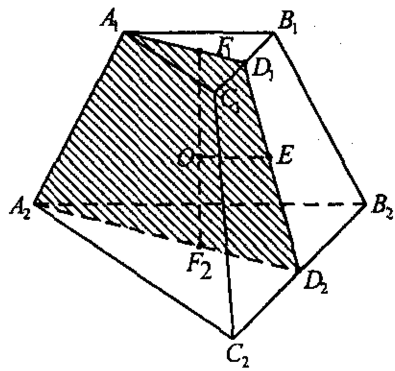


Рис. 12.41

Решение.

Если F_1 и F_2 — центры оснований данной правильной усеченной пирамиды $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ (рис. 12.41), O — центр шара радиуса R, вписанного в пирамиду, D_1 и D_2 — середины ребер B_1C_1 и B_2C_2, a и b стороны оснований, то тогда имеем $A_2D_2\perp B_2C_2\Rightarrow B_2C_2\perp D_1D_2\Rightarrow B_2C_2\perp A_1D_1D_2A_2\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1D_1D_2A_2\perp C_1B_1B_2C_2\Rightarrow$ радиус шара OE, проведенный к точке касания шара с гранью $C_1B_1B_2C_2$, лежит в плоскости $A_1D_1D_2A_2$. Отсюда

$$\frac{a}{2\sqrt{3}}=F_1D_1=D_1E,\ \frac{b}{2\sqrt{3}}=F_2D_2=D_2E\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1D_2=\frac{a+b}{2\sqrt{3}},\ S_{C_1B_1B_2C_2}=\frac{(a+b)^2}{2\sqrt{3}}.$$

Так как $\angle D_1OD_2 = 90°$, то $R^2 = OE^2 = \frac{ab}{12}$ и площадь S поверхности пирамиды равна

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{(a+b)^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(b-a) + 36R^2\right].$$

Далее, $4\pi R^2 : S = \pi : 6\sqrt{3}$, следовательно,

$$\frac{b-a}{2R} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{ctg}\angle D_1D_2F_2 = \frac{F_2D_2 - F_1D_1}{F_1F_2} = \frac{b-a}{4\sqrt{3}R} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle D_1D_2F_2 = \operatorname{arctg}2.$$

Ответ: arctg2.

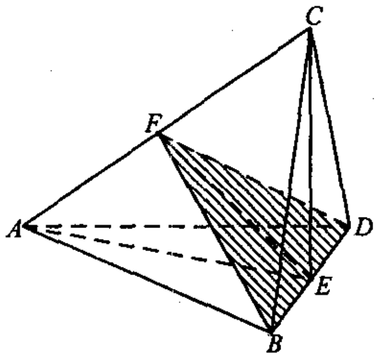


Рис. 12.42

12.431. Угол между плоскостями двух равных прямоугольных треугольников ABC и ADC с общей гипотенузой AC равен α. Угол между равными катетами AB и AD равен β. Найти угол между катетами BC и CD.

Решение.

Проведем перпендикуляр из вершины B и перпендикуляр из вершины D на AC: они пересекутся в одной точке F, так как $\Delta ABC = \Delta ADC$ (рис. 12.42). Пусть E — середина BD. ΔABD, ΔBFD, ΔBCD равнобедренные, следовательно, AE, FE и CE перпендикулярны BD. Если $\angle BCE = \gamma$, то

$$CB = \frac{BE}{\sin\gamma},\ AB = \frac{BE}{\sin\frac{\beta}{2}},\ FB = \frac{BE}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Далее,

$$AB\cdot BC = AC\cdot FB \Rightarrow \frac{BE^2}{\sin\gamma\cdot\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{BE^2\cdot\sqrt{\sin^2\gamma + \sin^2\frac{\beta}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\gamma\cdot\sin\frac{\beta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\gamma = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Окончательно получаем

Ответ: $\angle BCD = 2\gamma = 2\arcsin\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

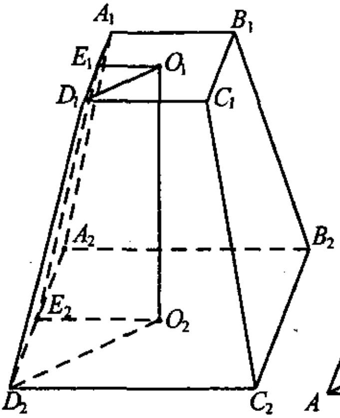


Рис. 12.43

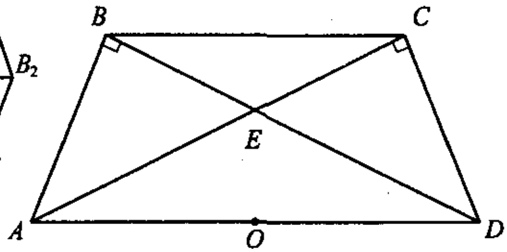


Рис. 12.44

12.432. Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды в 5 раз больше стороны верхнего основания. Боковая поверхность пирамиды равна квадрату ее высоты. Найти угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 — центры оснований данной правильной усеченной пирамиды $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, стороны оснований которой равны $2x$ и $10x$, E_1 и E_2 — середины ребер A_1D_1 и A_2D_2 (рис. 12.43). Тогда E_1E_2 — высота трапеции $A_1D_1D_2A_2$. Если $h = O_1O_2$, то, по условию, получаем

$$S_{A_1D_1D_2A_2} = \frac{h^2}{4} = 6x \cdot E_1E_2 = 6x\sqrt{O_1O_2^2 + (E_2O_2 - E_1O_1)^2} =$$

$$= 6x\sqrt{h^2 + 16x^2} \Rightarrow \left(\frac{h}{x}\right)^4 - 24\left(\frac{h}{x}\right)^2 - 16 \cdot 24^2 = 0 \Rightarrow \frac{h}{x} = 4\sqrt{2\left(9 + 3\sqrt{10}\right)}.$$

$$\operatorname{tg}\angle D_1D_2O_2 = \frac{h}{D_2O_2 - D_1O_1} = \frac{h}{4x\sqrt{2}} \Rightarrow \angle D_1D_2O_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{9 + 3\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{9 + 3\sqrt{10}}$.

12.433. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, диагонали которой перпендикулярны соответствующим боковым сторонам. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий ее боковой стороне, равен α. Отрезок прямой, соединяющий вершину верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть равнобедренная трапеция $ABCD$ — основание данной призмы. $AB = CD$, O — центр описанной около $ABCD$ окружности, $AC \perp CD$ (рис. 12.44). Тогда AD — диаметр окружности и O — середина AD.

Если F — вершина верхнего основания призмы, которая отрезком длины l соединена с точкой O, то, так как призма прямая, проекция F на нижнее основание совпадает с одной из вершин трапеции $ABCD$. Следовательно, проекция FO на нижнее основание, равная $l\cdot\cos\beta$, совпадает с радиусом окружности, т. е. $AD = 2l\cdot\cos\beta$.

$$\angle DEC = \alpha \Rightarrow \angle EAD = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AC = AD\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC^2}{2}\cdot\sin\alpha = 2l^2\cos^2\beta\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha.$$

Так как высота призмы равна $l\cdot\sin\beta$, то объем равен

$$2l^3\cos^2\beta\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Ответ: $l^3\cos\beta\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\beta\cdot\sin\alpha.$

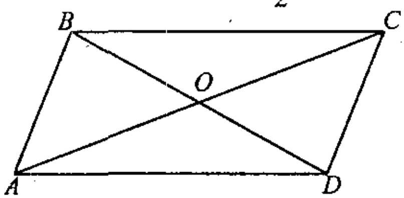


Рис. 12.45

12.434. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом α. Диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы β и γ ($\beta < \gamma$). Найти объем призмы, если ее высота равна H.

Решение.

Пусть параллелограмм $ABCD$ — основание данной прямой призмы, $\alpha = \angle A$ (рис. 12.45). Тогда $AC > BD$, $AC = H\cdot\operatorname{ctg}\beta$, $BD = H\cdot\operatorname{ctg}\gamma$ (AC и BD — проекции диагоналей призмы). По теореме косинусов для ΔABD и ΔABC получаем:

$$\begin{cases} H^2\operatorname{ctg}^2\gamma = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha, \\ H^2\operatorname{ctg}^2\beta = AB^2 + AD^2 + 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB\cdot AD = \frac{H^2\left(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\gamma\right)}{4\cos\alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = AB\cdot AD\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{H^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\gamma\right) = H^2\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin(\gamma-\beta)\cdot\sin(\gamma+\beta)}{4\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

Объем призмы равен $S_{ABCD} \cdot H$, поэтому окончательно получаем

Ответ: $H^3 \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin(\gamma-\beta)\cdot \sin(\gamma+\beta)}{4\sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma}$.

12.435. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы α и β. Найти объем призмы.

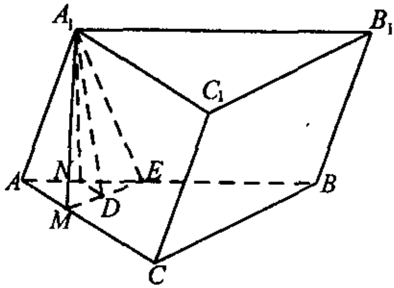


Рис. 12.46

Решение.

Пусть A_1D — высота данной призмы $ABCA_1B_1C_1$, ΔABC — правильный, $\angle A_1AB = \alpha$, $\angle A_1AC = \beta$ (рис. 12.46). Проведем перпендикуляры A_1N и A_1M на ребра AB и AC. Тогда имеем $DM \perp AC$, $DN \perp AB$. Продолжив MD до пересечения с AB в точке E, получаем

$$AM = b\cdot\cos\beta,\ AN = b\cdot\cos\alpha,\ AE = \frac{AM}{\cos 60^\circ} = 2b\cos\beta,$$

$$NE = AE - AN = b(2\cos\beta - \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$DE = \frac{NE}{\cos 30^\circ} = \frac{2b}{\sqrt{3}}(2\cos\beta - \cos\alpha).$$

По теореме косинусов для ΔAA_1E имеем:

$$A_1E^2 = b^2 + 4b^2\cos^2\beta - 4b^2\cos\alpha\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$A_1D^2 = A_1E^2 - DE^2 = \frac{b^2}{3}\left[3 - 4\left(\cos^2\alpha - \cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta\right)\right]$$

и объем призмы равен $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot A_1D$.

Ответ: $\dfrac{a^2 b}{4}\sqrt{3 - 4\left(\cos^2\alpha - \cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta\right)}$.

12.436. Основанием призмы служит параллелограмм с острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину данного угла α, равно b и составляет с прилежащими сторонами основания углы, каждый из которых равен β. Найти высоту призмы.

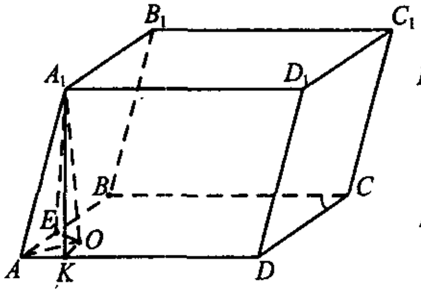


Рис. 12.47

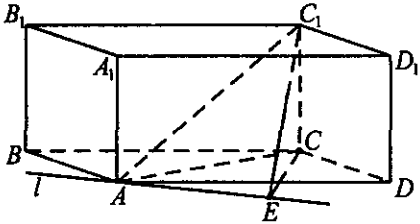


Рис. 12.48

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная призма (рис. 12.47), $AA_1 = b$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \beta$, A_1O — высота призмы. Проведем перпендикуляры A_1K и A_1E на ребра AD и AB. Тогда $OK \perp AD$, $OE \perp AB$, $\Delta A_1AK = \Delta A_1AE \Rightarrow AK = AE \Rightarrow AO$ — биссектриса угла $BAD \Rightarrow$

$$\Rightarrow AK = b\cdot\cos\beta, AO = \frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} =$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta} = \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.437. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с диагоналями a и b ($a > b$) и острым углом α между ними. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с большей диагональю основания острый угол β. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный прямой параллелепипед (рис. 12.48) и AC_1 — его меньшая диагональ, $AC = b$, $BD = a$. В плоскости основания $ABCD$ через A проведем прямую $l \parallel BD$, а из вершины C_1 опустим перпендикуляр C_1E на прямую l. Тогда $l \perp CE$, $\angle CAE = \alpha$, $\angle C_1AE = \beta$ (по условию) $\Rightarrow C_1E = AC_1\cdot\sin\beta$, $CE = b\cdot\sin\alpha$.

Далее,

$$C_1C^2 = C_1E^2 - CE^2,\ AC_1^2 = b^2 + C_1C^2 \Rightarrow C_1E^2 = \left(b^2 + C_1C^2\right)\cdot\sin^2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1C^2 = \left(b^2 + C_1C^2\right)\cdot\sin^2\beta - b^2\sin^2\alpha \Rightarrow C_1C = \frac{b}{\cos\beta}\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{b}{\cos\beta}\sqrt{\sin(\beta-\alpha)\cdot\sin(\beta+\alpha)}.$$

Так как $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$, то окончательно получаем

Ответ: $V_T = \frac{ab^2\sin\alpha}{2\cos\beta}\cdot\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$.

12.438. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписана прямая треугольная призма, три ее вершины лежат на апофемах пирамиды, а три другие — в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если центр вписанного в пирамиду шара лежит в плоскости верхнего основания призмы.

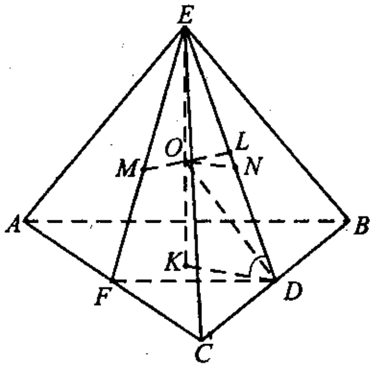


Рис. 12.49

Решение.

Пусть O — центр шара, вписанного в данную правильную пирамиду $EABC$, EK — ее высота, FE и ED — апофемы, M и N — две вершины верхнего основания вписанной в пирамиду призмы П (рис. 12.49). $BC \perp KD$, $BC \perp ED \Rightarrow BC \perp EDK \Rightarrow EDK \perp EBC \Rightarrow$ радиус OL шара, проведенный к точке касания L с гранью EBC, принадлежит $\Delta EDK \Rightarrow OD$ — биссектриса угла EDK, равного α (по условию) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow EK = KD\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}\alpha,\ OK = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

По условию O лежит в плоскости верхнего основания призмы П, следовательно, используя подобие, получаем:

$$\frac{MN}{FD} = \frac{EO}{EK} = 1 - \frac{OK}{EK} \Rightarrow MN = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Так как другие стороны основания призмы П вычисляются по той же формуле (третья вершина верхнего основания также лежит на апофеме грани EAB), то они равны MN, и, таким образом, окончательно получаем

$$\textit{Ответ}: V_{\Pi}=MN^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot OK=\frac{a^3}{32}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=\frac{a^3\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cdot\cos^5\frac{\alpha}{2}}.$$

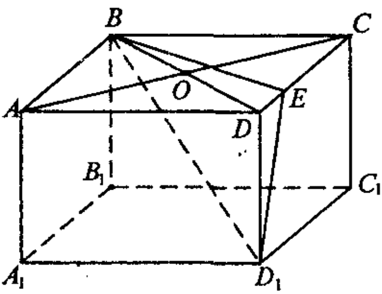


Рис. 12.50

12.439. Основание прямой призмы — ромб. Одна из диагоналей призмы равна a и составляет с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней — угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная прямая призма, $BD_1=a$, основание $ABCD$ — ромб, тогда $BB_1=a\cdot\sin\alpha$, $BD=a\cdot\cos\alpha$ (рис. 12.50). Проведем перпендикуляр BE на грань CC_1D_1D. Так как призма прямая, то BE лежит в плоскости основания $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \angle BD_1E'=\beta,\ BE=a\cdot\sin\beta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=a\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

$$\Delta BDE\sim\Delta CDO\Rightarrow\frac{DE}{DO}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow CD=\frac{BD\cdot\frac{BD}{2}}{DE}=\frac{a\cdot\cos^2\alpha}{2\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=CD\cdot BE=\frac{a^2\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{2\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}.$$

Подставляя в формулу $V_{П}=S_{ABCD}\cdot BB_1$ полученные значения, окончательно имеем

$$\textit{Ответ}: V_n=\frac{a^3\cdot\sin2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}}.$$

12.440. Отношение двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а углы, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, относятся как 2 : 3. Найти эти углы и допустимые значения k.

Решение.

Возьмем данные отрезки равными a и ka, а углы, которые они составляют с одной из плоскостей, равными β и $\frac{2}{3}\beta$ соответственно. Так как плоскости параллельны, то расстояние между ними равно $a \cdot \sin\beta$ или $ka \cdot \frac{2}{3}\beta$, следовательно,

$$k\sin\frac{2}{3}\beta = \sin\beta \Rightarrow 2k\cdot\sin\frac{\beta}{3}\cdot\cos\frac{\beta}{3} = 3\sin\frac{\beta}{3} - 4\sin^3\frac{\beta}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{\beta}{2} - 2k\cdot\cos\frac{\beta}{3} - 1 = 0 \Rightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}.\ 0^\circ < \beta \le 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0^\circ < \frac{\beta}{3} \le 30^\circ \Leftrightarrow \cos 0^\circ > \cos\frac{\beta}{3} \ge \cos 30^\circ \Leftrightarrow 1 > \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k < 4, \\ (4-k)^2 > k^2+4, \\ \left[\begin{array}{l} k > 2\sqrt{3}, \\ k^2+4 > \left(2\sqrt{3}-k\right)^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \le k \le \frac{3}{2}.$$

Ответ: $2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3} \le k < \frac{3}{2}$.

12.441. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ и некоторой плоскостью P равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найти угол между стороной AD и плоскостью P.

Решение.

Очевидно, можно считать, что данная плоскость P проходит через вершину A данного квадрата $ABCD$. Опустим перпендикуляры BM и DN на плоскость P.

Если отрезок KL в ΔADN таков, что $KL \parallel DN$ и $KL = BM$, то $BKLM$ — прямоугольник, и линия l пересечения $ABCD$ и плоскости P параллельна BK и LM (рис. 12.51). Следовательно, если AE и AF — высоты ΔABK и AML, то они перпендикулярны l, т. е. $\angle EAF = \alpha$. Так как $ML \perp AE$, $ML \perp AF$, то $ML \perp EF \Rightarrow EF = BM$.

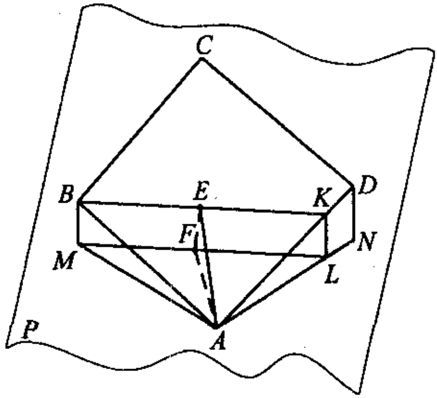


Рис. 12.51

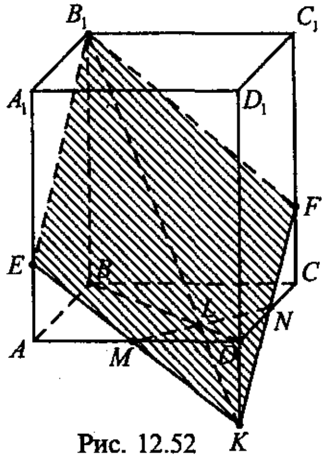


Рис. 12.52

Таким образом,

$$AE=\frac{BM}{\sin\alpha},\ AB=\frac{BM}{\sin\beta},\ AK=\frac{KL}{\sin\gamma}\ (\gamma=\angle DAN),$$

$$BK\cdot AE=\sqrt{AB^2+AK^2}\cdot AE=AB\cdot AK=2S_{ABK}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}\Rightarrow\sin^2\gamma=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta).$$

Ответ: $\gamma=\arcsin\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}$.

12.442. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$) через середины двух смежных сторон основания DC и AD и вершину B_1 верхнего основания проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если периметр сечения в три раза больше диагонали основания.

Решение.

Если B_1FNME — сечение данной правильной призмы плоскостью, проходящей через B_1 и середины M и N ребер AD и DC, K — точка пересечения этой плоскости с продолжением ребра D_1D, то B_1FKE — параллелограмм (рис. 12.52). Кроме того, это ромб, так как $KF=KE$ (их проекции AD и CD на плоскость $ABCD$ равны).

Пусть L — точка пересечения BD и MN. $MN\perp BD\Rightarrow MN\perp B_1L\Rightarrow$ $\angle B_1LB$ — искомый.

Возьмем $EK = a$, тогда по условию,

$$3 \cdot BD = B_1F + B_1E + EM + FN + MN = 3a + \frac{BD}{2}$$

$$\left(MN = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2},\ EM = FN = \frac{a}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{5}{6} BD.$$

EF и B_1K — диагонали ромба $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1K = 2\sqrt{EK^2 - \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{BD^2}{4}} = \frac{4}{3} \cdot BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle B_1LB = \frac{BL}{B_1L} = \frac{BL + LD}{B_1L + LK} = \frac{BD}{B_1K} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\arccos \frac{3}{4}$.

12.443. Расстояния от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны соответственно a и b. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

Решение.

Пусть O — центр данной правильной пирамиды $FABCD$ (рис. 12.53). Если E — середина CD, то $CD \perp FEO \Rightarrow FEO \perp FCD \Rightarrow$ перпендикуляр ON на грань FCD лежит в плоскости FEO. Рассмотрим $OM \perp AF$, $x = OE$, $h = FO$. Тогда

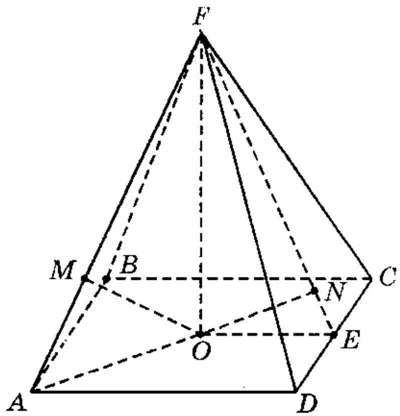


Рис. 12.53

$$\begin{cases} OM \cdot AF = AO \cdot FO, \\ ON \cdot EF = OE \cdot FO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \cdot \sqrt{h^2 + 2x^2} = \sqrt{2} \cdot x \cdot h, \\ a \cdot \sqrt{h^2 + x^2} = x \cdot h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h^2 + 2x^2}{h^2 + x^2} = \frac{2a^2}{b^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{h}{x}\right)^2 = \frac{b^2}{2a^2 - b^2}.$$

Так как $1 + \left(\frac{h}{x}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \angle FEO$, то $\cos \angle FEO = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{b}$.

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{b}$.

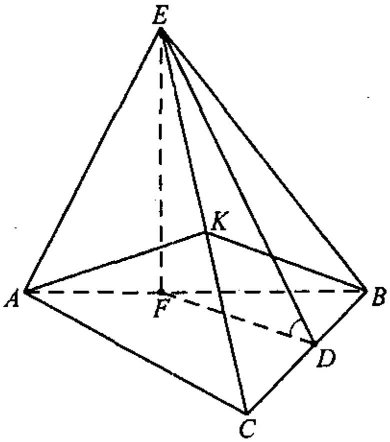


Рис. 12.54

12.444. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды *перпендикулярна плоскости основания*. Найти косинус угла между двумя другими боковыми гранями, если они составляют с плоскостью основания угол α.

Решение.

Пусть $EABC$ — данная пирамида, $EAB \perp ABC$ (рис. 12.54). Тогда высота EF пирамиды лежит в плоскости EAB. Если ED — высота ΔEBC, то $BC \perp FD \Rightarrow \angle EDF = \alpha$, $FD = EF \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, т. е. расстояния от точки F до сторон AC и BC правильного ΔABC равны (грань EAC также составляет с основанием ABC угол α) $\Rightarrow F$ — середина $AB \Rightarrow EA = EB \Rightarrow \Delta EAC = \Delta EBC \Rightarrow$ перпендикуляры, проведенные из A и B на ребро EC, пересекутся в одной точке $K \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AKB$ — искомый.

Если a — сторона ΔABC, то

$$FD = \frac{a\sqrt{3}}{4};\ CD = \frac{3}{4}a;\ ED = \frac{DF}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ EC = \sqrt{CD^2 + ED^2} = \frac{a}{4\cos\alpha}\sqrt{3 + 9\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{KB}{a} = \frac{ED}{FC} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}\quad (\Delta EDC \sim \Delta KBC).$$

Тогда, по теореме косинусов для ΔAKB, получаем:

$$\cos\angle AKB = \frac{2KB^2 - a^2}{2KB^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{KB}\right)^2 = 1 - \frac{1 + 3\cos^2\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{1 - 3\cos^2\alpha}{2}$.

12.445. Основанием наклонной призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна основанию, а боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу, составляет с основанием острый угол β. Найти острый угол между третьей боковой гранью и основанием.

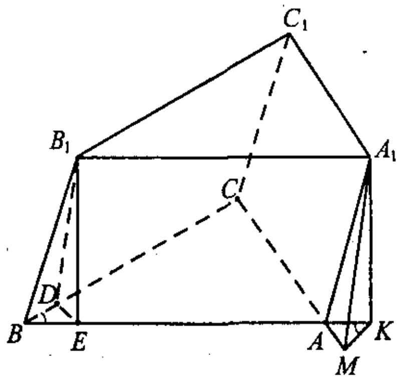


Рис. 12.55

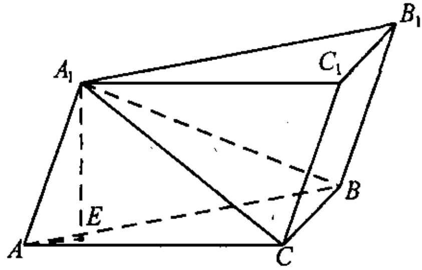


Рис. 12.56

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма (рис. 12.55), $ABB_1A_1 \perp ABC$, $\angle BCA = 90°, \angle CBA = \alpha$. Если B_1E и A_1K — высоты призмы, то по условию они принадлежат грани ABB_1A_1. Проведем перпендикуляры A_1M и B_1D на ребра AC и BC соответственно. Тогда $KM \perp CM$, $DE \perp BC \Rightarrow \angle B_1DE$ и $\angle A_1MK$ — углы между соответствующими гранями и основанием $ABC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle B_1DE = \beta$. $BE = AK$ (проекции равных наклонных B_1B, A_1A) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AKM = \Delta BDE (\angle AKM = \angle CBA = \alpha) \Rightarrow AM = DE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{KM} = \frac{DE}{KM}, \ \operatorname{tg}\beta = \frac{B_1E}{DE} = \frac{A_1K}{DE} \Rightarrow \ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{A_1K}{KM} = \operatorname{tg}\angle A_1MK.$$

Ответ: $\angle A_1MK = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$.

12.446. Сторона BC треугольника ABC, лежащего в основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$), равна а, прилежащие к ней углы равны β и γ. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания, если объем призмы равен V и $AA_1 = A_1B = A_1C$.

Решение.

Если A_1E — высота данной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.56), $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, то из равенства $AA_1 = A_1B = A_1C$ получаем, что E — центр описанной около ΔABC окружности (равные наклонные имеют равные проекции) радиуса AE.

По теореме синусов для ΔABC

$$AB = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \gamma)}, \quad AC = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(180° - \beta - \gamma)}.$$

Так как $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{AE}$, то

$$\operatorname{tg}\angle A_1AE=\frac{A_1E}{AE}=\frac{V}{S_{ABC}\cdot AE}=\frac{4V}{AB\cdot AC\cdot BC}=\frac{4V\cdot\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{4V\cdot\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

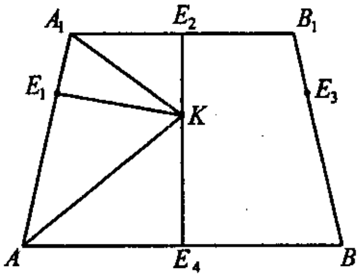


Рис. 12.57, *а*

12.447. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписаны два шара, один касается всех ее граней, другой — всех ребер. Найти синус угла между боковым ребром и плоскостью основания.

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная правильная усеченная пирамида, P и P_1 — центры ее оснований ABC и $A_1B_1C_1$, b и a — стороны оснований, O — центр вписанного шара, Q — центр шара, касающегося всех ребер пирамиды.

Если K — проекция точки Q на боковую грань AA_1B_1B, E_1, E_2, E_3, E_4 — точки касания шара Q с ребрами этой грани, то K — центр окружности радиуса E_1K, вписанной в равнобедренную трапецию AA_1B_1B (рис. 12.57, *а*) (равные наклонные QE_i имеют равные проекции EK, $i=1, 2, 3, 4$).

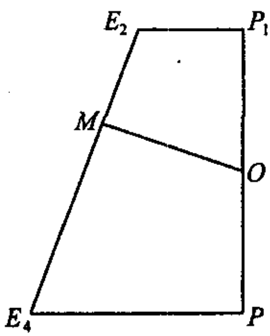


Рис. 12.57, *б*

$$\angle A_1KA=90^\circ\Rightarrow E_1K^2=E_1A_1\cdot E_1A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1K^2=A_1E_2\cdot AE_4=\frac{a\cdot b}{4}\Rightarrow E_2E_4^2=ab.$$

Далее, $A_1A=\dfrac{a+b}{2}$.

Если OM — радиус шара O, проведенный к точке касания M с гранью AA_1B_1B, которая принадлежит E_2E_4 (рис. 12.57, *б*), то, рассуждая аналогично, получаем:

$$OM^2=E_2P_1\cdot E_4P=\frac{ab}{12},\ P_1P^2=4\cdot OM^2=\frac{ab}{3};$$

$$E_2E_4=E_2P_1+E_4P=\frac{a+b}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{a+b}{2\sqrt{3}}=ab.$$

Таким образом, имеем $\sin\angle A_1AP=\frac{P_1P}{A_1A}=\sqrt{\frac{ab}{3}};\ \frac{a+b}{2}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

12.448. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция с основаниями a и b ($a>2b$) и углом φ между неравными отрезками ее диагоналей. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Углы, которые составляют с плоскостью основания боковые грани, проходящие через основания трапеции, относятся как 1 : 2. Найти объем пирамиды.

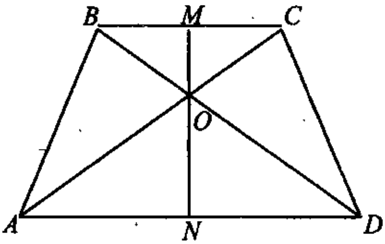


Рис. 12.58

Решение.

Пусть равнобедренная трапеция $ABCD$ — основание данной пирамиды $EABCD$, $AD=a$, $BC=b$ (рис. 12.58). Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведем ее высоту MN: тогда $EM\perp BC$, $EN\perp AD$, т. е. $\angle EMO=2\alpha$, $\angle ENO=\alpha$ (по условию).

$$\angle ADO=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{\varphi}{2}\Rightarrow MN=MP+ON=\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Так как $ON=EO\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, $OM=EO\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$, то

$$\frac{OM}{ON}=\frac{b}{a}=(\Delta BCO\sim\Delta ADO)=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a-2b}{a}}\Rightarrow EO=ON\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{\frac{a-2b}{a}}.$$

Ответ: $V_{EABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot EO=\frac{(a+b)^2}{24}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{a(a-2b)}$.

12.449. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти

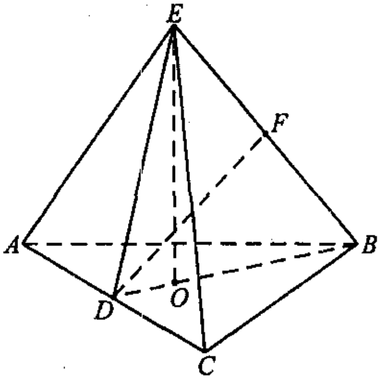


Рис. 12.59

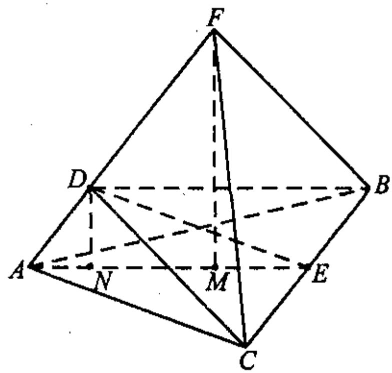


Рис. 12.60

расстояние между боковым ребром и не пересекающей его стороной основания.

Решение.

Если EO — высота данной правильной пирамиды $EABC$ (рис. 12.59), D — середина AC, то $AC \perp ED$, $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp EBD \Rightarrow AC \perp DF$, где DF — высота ΔEBD, т. е. DF — общий перпендикуляр AC и EB.

$$\Delta DFB \sim \Delta EBO \Rightarrow \frac{DF}{EO}=\frac{DB}{EB}. \quad EO = DO\cdot \operatorname{tg}\angle EDO = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

$$DB=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ EB=EC=\sqrt{FD^2+DC^2}=\sqrt{\frac{DO^2}{\cos^2\alpha}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}.$$

Ответ: $DF=\dfrac{a\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

12.450. В треугольной пирамиде все грани — правильные треугольники. Через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении 1 : 3, считая от основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть сечение BCD плоскостью данной пирамиды $FABC$ делит ее объем в отношении 1:3 (считая от основания) (рис. 12.60). Пирамиды $FBCD$ и $ABCD$ имеют общее основание $BCD \Rightarrow$ их объемы пропорциональны высотам, проведенным из F и A. Эти высоты, в свою очередь,

пропорциональны FD и AD, т. е. $\dfrac{DF}{AD}=3$.

Если E — середина BC, то $BC \perp AE$, $BC \perp FE$ (все грани — правильные треугольники) $\Rightarrow BC \perp AFE \Rightarrow BC \perp DE$.

Обозначим $\alpha = \angle FEA$, a — ребро пирамиды. Тогда

$$AE = FE = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AF = a,$$

и по теореме косинусов для ΔAFE $\cos\alpha = \dfrac{2 \cdot AE^2 - a^2}{2 \cdot AE^2} = \dfrac{1}{3}$.

Проведем перпендикуляры DN, FM на сторону AE ΔAFE.

Тогда $ME = FE \cdot \cos\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AM = AE - ME = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Имеем

$$AN : NM = AD : DF = 1 : 3 \Rightarrow NM = \frac{a\sqrt{3}}{4}, DN = \frac{FM}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle AED = \frac{DN}{NE} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

12.451. В правильной четырехугольной пирамиде через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями и допустимые значения k.

Решение.

Пусть O — центр основания данной правильной пирамиды $FABCD$; FAC — данное сечение пирамиды плоскостью, проходящей через FA и FC (рис. 12.61). Проведем перпендикуляры из вершин A и C на ребро FD: они пересекутся в одной точке E (по равенству боковых граней).

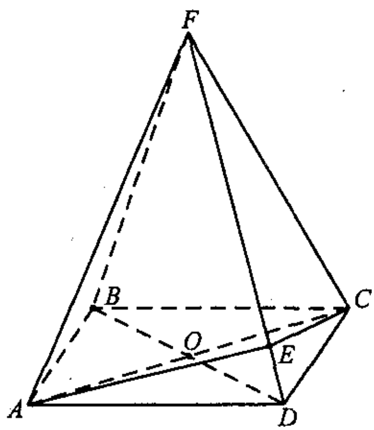


Рис. 12.61

Если $\angle AKC = \alpha$, то по условию

$$S_{FAC} = S_{FBD} = 4k \cdot S_{FCD} \Rightarrow OE \cdot FD = 4k\frac{FD \cdot CE}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k = \frac{OE}{CE} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 8k^2 - 1.$$

Так как

$$OE < OD = OC \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \angle OEC > 45° \Rightarrow \alpha > 90° \Rightarrow 8k^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\arccos\left(8k^2 - 1\right),\ 0 < k < \frac{\sqrt{2}}{4}.$

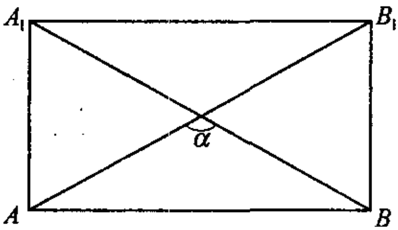


Рис. 12.62

12.452. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом φ между диагоналями. Диагонали каждой из смежных боковых граней пересекаются под углами α и β ($\alpha > \beta$), обращенными к соответствующим сторонам основания. Найти объем призмы, если ее высота равна h.

Решение.

Если боковая грань AA_1B_1B (рис. 12.62) данной прямой призмы $\Pi = ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ — ее основание) есть прямоугольник, в котором $\angle B_1OB = \pi - \alpha$ и $B_1B = h$ (по условию), то

$$\angle B_1AB = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow\ AB = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично, $BC = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$

Таким образом, в основании призмы — параллелограмм со сторонами $h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $h \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и острым углом φ между диагоналями. В задаче 12.396 находилась формула площади такого параллелограмма:

$$S_{ABCD} = \frac{AB^2 - BC^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right).$$

По формуле $V_\Pi = S_{ABCD} \cdot h$ находим

Ответ: $V_\Pi = \frac{h^3}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \dfrac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}}.$

12.453. Основанием пирамиды $ABCDE$ служит ромб $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Высота пирамиды проходит через середину стороны AB. Боковые ребра EC и ED составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные α и β. Найти косинус острого угла ромба, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

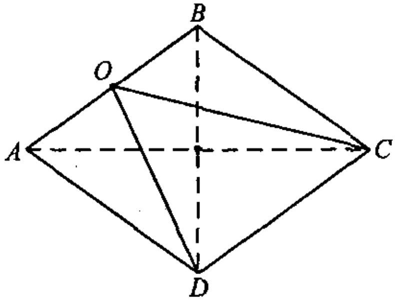


Рис. 12.63

Решение.

Если $ABCD$ — основание данной пирамиды (рис. 12.63), а EO — ее высота, то $EO = OC \cdot \mathrm{tg}\alpha = OD \cdot \mathrm{tg}\beta \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} = \sqrt{2}$ (по условию, $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\mathrm{tg}\beta = 2$). Обозначим $\angle A = \gamma$, $AO = a$. По теореме косинусов для ΔOBC и ΔOAD имеем:

$$OC^2 = 5a^2 + 4a^2 \cdot \cos\gamma, OD^2 = 5a^2 - 4a^2 \cdot \cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = \left(\frac{OC}{OD}\right)^2 = \frac{5+4\cos\gamma}{5-4\cos\gamma} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{5}{12}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

12.454. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между высотой пирамиды и боковым ребром равен α $\left(\alpha \le \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной через середину высоты перпендикулярно одному из ее боковых ребер.

Решение.

Если F — середина высоты EO данной правильной пирамиды $FABCD$, а $KNLM$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через F и перпендикулярной ребру FC (рис. 12.64) (L лежит между вершинами A и E, как будет доказано ниже), то $\Delta EKM = \Delta EKN \Rightarrow EM = EN \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow$ $\Rightarrow BD \perp ACE \Rightarrow BD \perp KL \Rightarrow MN \perp KL$,

$$KL = EK \cdot \mathrm{tg}2\alpha = EF \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}2\alpha = \frac{EO}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}2\alpha =$$

$$= \frac{OC}{2} \cdot \mathrm{ctg}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}2\alpha = \frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \mathrm{ctg}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}2\alpha.$$

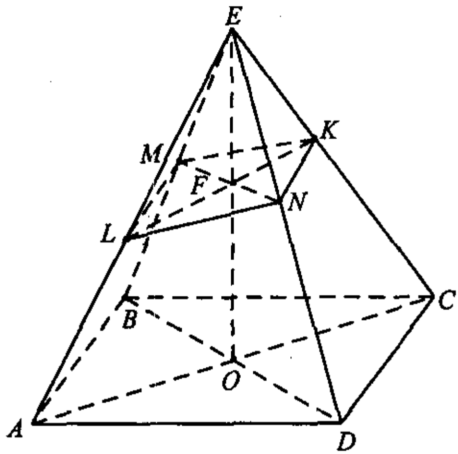


Рис. 12.64

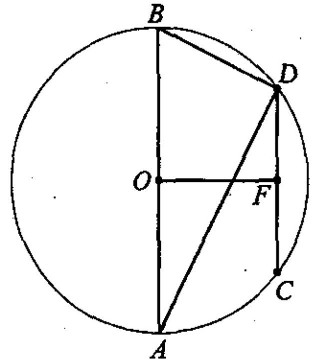


Рис. 12.65

Докажем, что $EL < EA = EC$.

$$EL = \frac{EK}{\cos 2\alpha} = \frac{EF \cdot \cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{EO}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{EC \cdot \cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{EC}{2\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)} < EC,$$

так как по условию $\operatorname{tg}^2\alpha < \frac{1}{2}$.

Получили, что в сечении — четырехугольник $KNML$ с перпендикулярными диагоналями $\Rightarrow S_{KNLM} = \frac{MN \cdot KL}{2} = \frac{a^2}{8} \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha$.

Ответ: $\frac{a^2}{8} \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha$.

12.455. Пусть AB — диаметр нижнего основания цилиндра, A_1B_1 — хорда верхнего основания, параллельная AB. Плоскость, проведенная через прямые AB и A_1B_1, составляет с плоскостью нижнего основания цилиндра острый угол α, а прямая AB_1 составляет с той же плоскостью угол β. Найти высоту цилиндра, если радиус основания цилиндра равен R (точки A и A_1 лежат по одну сторону от прямой, проходящей через середины отрезков AB и A_1B_1).

Решение.

Пусть D, C, F — проекции на нижнее основание данного цилиндра точек B_1, A_1, O_1 соответственно, где O_1 — середина хорды A_1B_1, O — центр нижнего основания цилиндра, h — высота цилиндра (рис. 12.65). Тогда $AD = h \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $OF \perp CD$ (по свойству радиуса круга, проходящего

через середину хорды) $\Rightarrow OO_1 \perp AB \Rightarrow \angle O_1OF = \alpha, \quad OF = h \cdot \text{ctg}\alpha.$
$\angle ADB = 90°$, OF равен высоте $\Delta ADB \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB \cdot OF = AD \cdot BD = 2S_{ADB} \Rightarrow 2Rh \cdot \text{ctg}\alpha = h \cdot \text{ctg}\beta \cdot \sqrt{4R^2 - h^2\text{ctg}^2\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 2R\text{tg}^2\beta \cdot \sqrt{\text{ctg}^2\beta - \text{ctg}^2\alpha}.$$

Таким образом, ответ принимает следующий вид:

Ответ: $h = 2R\text{tg}\beta \cdot \dfrac{\sqrt{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

12.456. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 12.66) равна H. Через вершину A основания ABC проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру SC. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем части пирамиды, заключенной между плоскостью основания и плоскостью сечения.

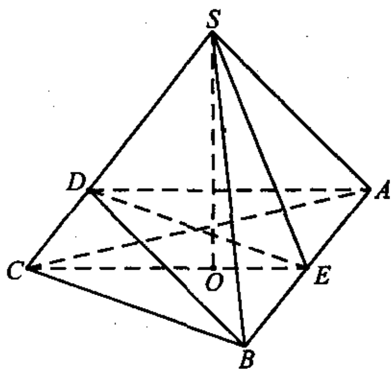


Рис. 12.66

Решение.

Пусть SO — высота данной правильной пирамиды $SABC$. Проведем перпендикуляры из вершин A и B на ребро SC: они пересекутся в одной точке D (так как боковые грани равны) $\Rightarrow SC \perp BDA$. Так как через точку можно провести единственную плоскость перпендикулярную данной прямой, то плоскость BDA —та, о которой говорится в условии задачи.

Если E — середина AB, то $AB \perp CE, AB \perp SE \Rightarrow AB \perp CSE \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \perp DE \Rightarrow \angle DEC = \alpha. \quad CO = H \cdot tg\angle CSO = H \cdot \text{tg}\alpha,$

$$AB = \sqrt{3} \cdot CO = \sqrt{3}H \cdot \text{tg}\alpha, CD = CE \cdot \sin\alpha = \frac{3}{2}CO \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{3}{2}H \cdot \text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha, DE = CE \cdot \cos\alpha = \frac{3}{2}H \cdot \text{tg}\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABD} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot DE}{2} \cdot CD = \frac{3\sqrt{3}}{8}H^3\text{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}H^3\text{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha.$

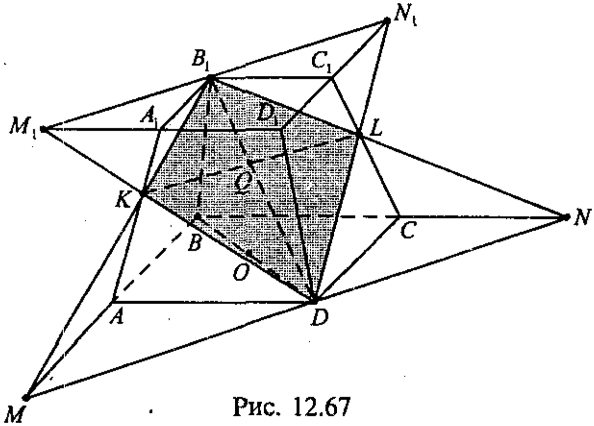


Рис. 12.67

12.457. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с основанием угол α, а диагональ пирамиды с основанием — угол β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно не пересекающей ее диагонали основания.

Решение.

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная правильная усеченная пирамида, O — проекция B_1 на нижнее основание $ABCD$, то $\angle B_1DO = \beta$, $\angle B_1BO = \alpha$, (по условию) и O лежит на диагонали BD, так как $B_1D_1DB \perp ABCD$.

Пусть π — плоскость, проходящая через B_1, D и параллельная AC, B_1LDK — сечение пирамиды плоскостью π (рис. 12.67). Тогда линии MN и M_1N_1 пересечения π с основаниями пирамиды будут параллельны AC и A_1C_1 (точки M, N, M_1, N_1 лежат на продолжениях соответствующих сторон оснований) и $KL \parallel MN$.

Так как $AC \perp B_1D_1DB$ (пирамида правильная), то $AC \perp B_1D \Rightarrow$
$\Rightarrow KL \perp B_1D \Rightarrow S_{B_1LDK} = \frac{1}{2} KL \cdot B_1D.$

Из подобия треугольников получаем (Q — точка пересечения KL и B_1D)

$$\frac{KL}{MN} = \frac{B_1Q}{B_1D},\ \frac{KL}{M_1N_1} = \frac{DQ}{DB_1} \Rightarrow KL\left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{M_1N_1}\right) = 1.$$

$$M_1N_1 = 2 \cdot A_1C_1,\ MN = 2 \cdot AC \Rightarrow KL = \frac{2 \cdot AC \cdot A_1C_1}{AC + A_1C_1}.$$

Таким образом, $AC = BD = BO + OD = H \cdot \operatorname{ctg}\alpha + H \cdot \operatorname{ctg}\beta$. Аналогично, $A_1C_1 = B_1D_1 = H \cdot \operatorname{ctg}\beta - H \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ и $B_1D = \dfrac{H}{\sin\beta}$.

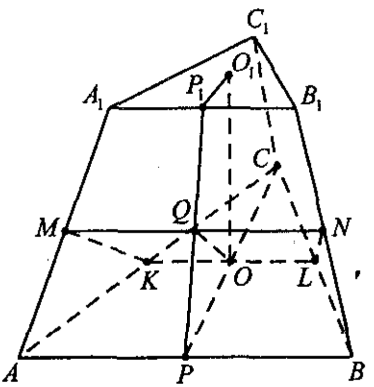


Рис. 12.68, *а*

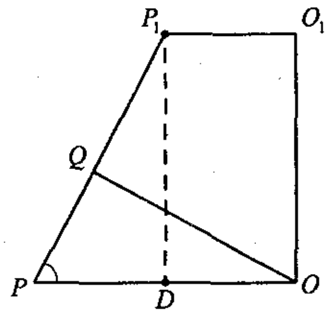


Рис. 12.68, *б*

Окончательно получаем: $S_{B_1LDK} = \dfrac{H^2\left(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha\right)}{2\sin\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta}$.

Ответ: $S_{B_1LDK} = \dfrac{H^2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin 2\beta}$.

12.458. Стороны нижнего и верхнего оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны соответственно a и b ($a > b$). Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через среднюю линию боковой грани и центр нижнего основания.

Решение.

Пусть MN — средняя линия боковой грани данной правильной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12.68, *а* и *б*), O и O_1 — центры оснований пирамиды, $MNLK$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через O и MN. Тогда $MN \parallel AB \parallel KL$. Если P и P_1 — середины AB и A_1B_1, то плоскость OPP_1O_1 перпендикулярна основаниям (пирамида правильная). Пусть OQ — линия пересечения OPP_1O_1 и $MNLK$. Так как $AB \perp PP_1$, $AB \perp OP$, то $\angle OPQ = \alpha$, $MN \perp OQ$, т.е. OQ — высота трапеции $MNLK$,

$$S_{MNLK} = OQ\cdot\frac{1}{2}(MN + KL).$$

$$PP_1 = \frac{PD}{\cos\alpha} = \frac{PO - P_1O_1}{\cos\alpha} = \frac{a-b}{2\sqrt{3}\cos\alpha} \Rightarrow PQ = \frac{PP_1}{2} = \frac{a-b}{4\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

Так как $PO = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, то по теореме косинусов для ΔPQO,

$$OQ=\sqrt{PO^2+PQ^2-2\cdot PO\cdot PQ\cdot\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3\left(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha\right)}}{12\cos\alpha}.$$

$$MN=\frac{a+b}{2},\ KL=\frac{2}{3}a.$$

Окончательно получаем

Ответ: $S_{MNLK}=\dfrac{7a+3b}{144\cos\alpha}\cdot\sqrt{3\left(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha\right)}$.

12.459. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, высота которой равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α.

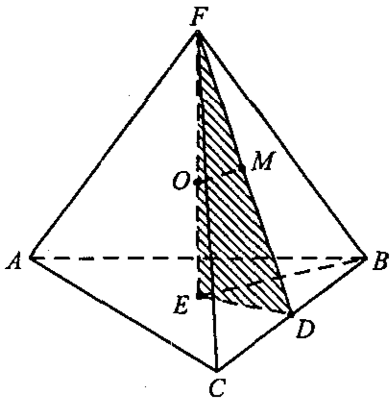


Рис. 12.69

Решение.

Если O — центр шара радиуса x, вписанного в данную правильную пирамиду $FABC$, FE — высота пирамиды, D — середина BC (рис. 12.69), то $BC\perp FD$, $BC\perp ED\Rightarrow BC\perp FDE$ $\Rightarrow FBC\perp FDE\Rightarrow$ точка касания M шара O с гранью FBC лежит на апофеме FD. Таким образом, получаем

$$ED=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}H\cdot\operatorname{ctg}\alpha\Rightarrow FD=\sqrt{ED^2+FE^2}=\frac{H}{2}\sqrt{4+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

$$\Delta FMO\sim\Delta FDE\Rightarrow\frac{x}{ED}=\frac{H-x}{FD}\Rightarrow x=\frac{H}{1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}}=$$

$$=\frac{H}{4\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}-1\right).$$

Ответ: $\dfrac{H}{4\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}-1\right)$.

12.460. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания как 3 : 4. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть O — центр шара, описанного около данной правильной пира-

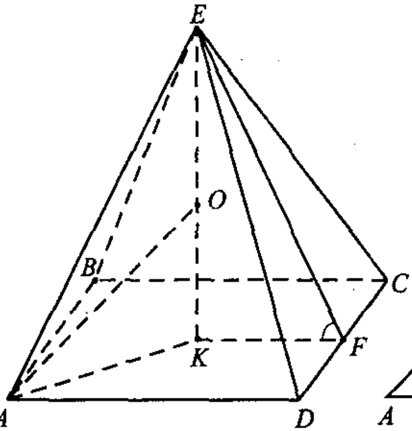


Рис. 12.70

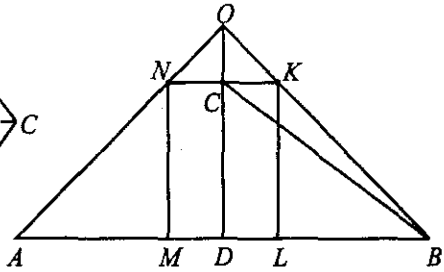


Рис. 12.71

миды $EABCD$, EK — высота пирамиды, $a = AB$, F — середина CD (рис. 12.70). По условию, $AO = \frac{3}{4}a$.

Возможны следующие случаи:

1) O лежит между E и K. Тогда

$$OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \frac{a}{4},\ EK = EO + OK = a \Rightarrow \operatorname{tg}\angle EFK = \frac{EK}{KF} = 2.$$

2) O лежит на продолжении EK. Тогда

$$KO = \frac{a}{4},\ EK = EO - OK = \frac{a}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle EFK = 1.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}2$ или $\frac{\pi}{4}$.

12.461. В конус, осевое сечение которого — прямоугольный треугольник, вписан цилиндр, его нижнее основание лежит в плоскости основания конуса. Отношение боковых поверхностей конуса и цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найти угол между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.

Решение.

Пусть ΔAOB — осевое сечение данного конуса ($\angle AOB = 90°$), $MNKL$ — осевое сечение вписанного в него цилиндра (рис. 12.71), OD — высота конуса, C — центр верхнего основания цилиндра.

Возьмем $H = KL, R = DB$. Тогда

$$OB = R\sqrt{2}\ (\angle DBO = 45°),\ \frac{\pi R \cdot OB}{\pi \cdot 2DL \cdot H} = 4\sqrt{2}\ \text{(по условию)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2\sqrt{2}}{2H(R-H)} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{R}{H}\right)^2 - 8\left(\frac{R}{H}\right) + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\angle CBD = \frac{R}{H} = 4 \pm 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arcctg}\left(4 \pm 2\sqrt{2}\right)$.

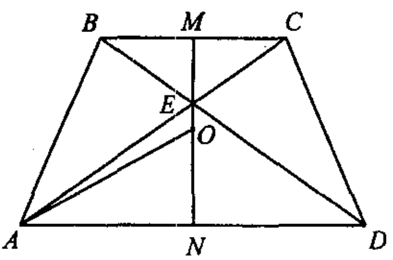


Рис. 12.72

12.462. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса, и ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и составляет с высотой угол β.

Решение.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), которая является основанием данной пирамиды $FABCD$, O — центр основания данного конуса, K — вершина конуса, E — проекция F на основание $ABCD$, $\alpha = \angle BAD$ (рис. 12.72). Проведем высоту MN трапеции $ABCD$, проходящую через точки E и O. Так как O — центр окружности, вписанной в $ABCD$, то $MN = 2 \cdot MO = 2l \cdot \sin\beta$, $S_{ABCD} = MN(BM + AN)$, AO и BO — биссектрисы $\angle A$ и $\angle B$,

$$AN = ON \cdot \operatorname{ctg}\angle OAN = l \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$BM = OM \cdot \operatorname{ctg}\angle OBM = l \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Далее, KM — образующая конуса $\Rightarrow KOM \perp ABCD \Rightarrow$ перпендикуляр к плоскости $ABCD$, проведенный в точке E, принадлежит $\Delta KOM \Rightarrow$ $\Rightarrow$ вершина F пирамиды лежит на образующей KM. Таким образом,

$$FP = ME \cdot \operatorname{ctg}\beta\ (\angle FMO = 90° - \beta).$$

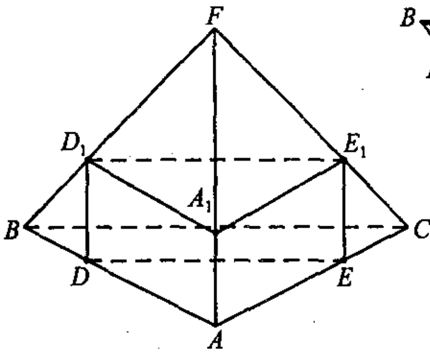


Рис. 12.73, *а*

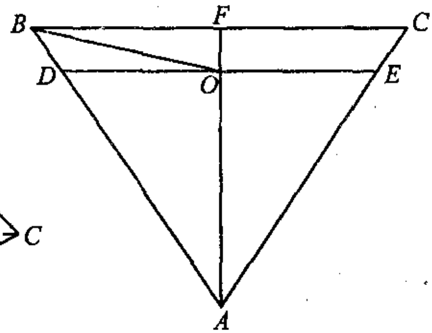


Рис. 12.73, *б*

С другой стороны,

$$\Delta EBC \sim \Delta EAD \Rightarrow \frac{ME}{EN+ME}=\frac{BM}{AN+BM} \Rightarrow ME=\frac{BM\cdot MN}{BM+AN}.$$

Окончательно получаем

Ответ:

$$V_{FABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot FE=\frac{\operatorname{ctg}\beta}{3}MN^2\cdot BM=\frac{2}{3}l^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\cdot\sin 2\beta.$$

12.463. Основанием пирамиды $FABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между равными сторонами AB и AC равен α ($\alpha < \pi/2$). В пирамиду вписана треугольная призма $AEDA_1E_1D_1$, точки A_1, E_1 и D_1 лежат соответственно на боковых ребрах AF, CF и BF пирамиды, а сторона ED основания AED проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найти отношение объема призмы к объему пирамиды.

Решение.

Из условия имеем $BC \parallel DE \parallel D_1E_1$. Обозначим через h_1 и h_2 высоты призмы $\Pi_1 = AEDA_1E_1D_1$ и пирамиды $\Pi_2 = FABC$ (рис. 12.73, *а*). Из подобия пирамид $FA_1D_1E_1$ и Π_2 получаем, что $\frac{h_1}{h_2}=\frac{BD_1}{BF}=\frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2}=\frac{BD}{BA}$.

Так как $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{DA^2}{BA^2}$, то $\frac{V_{\Pi_1}}{3V_{\Pi_2}}=\frac{h_1\cdot S_{ADE}}{h_2\cdot S_{ABC}}=\frac{BD\cdot AD^2}{BA^3}$.

Рассмотрим основание ABC пирамиды Π_2 (рис. 12.73, *б*). Если AF — высота ΔABC, O — центр описанного около ΔABC круга (O лежит внутри ΔABC, так как $\angle A = \alpha < \frac{\pi}{2}$), то

$\angle BOF = \alpha(\angle BOF = \angle OBA + \angle OAB = 2 \cdot \angle OAB) \Rightarrow$

$$\Rightarrow OF = OB \cdot \cos\alpha, \ \frac{AO}{AF} = \frac{AO}{AO + AO \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{1+\cos\alpha}(AO = BO).$$

Из подобия треугольников получаем, что $\frac{AO}{AF} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{1+\cos\alpha}$.

Окончательно имеем

$$\frac{V_{\Pi_1}}{V_{\Pi_2}} = \frac{3AD^2(AB - AD)}{BA^3} = 3\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{AD}{AB}\right) = \frac{3\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

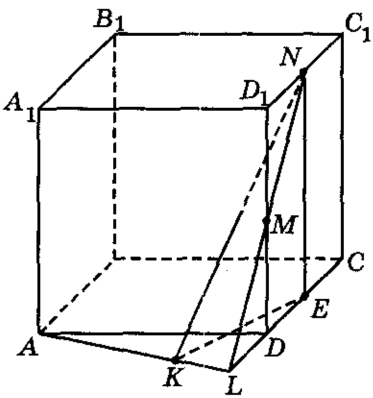


Рис. 12.74

12.464. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1)$ проведена плоскость через середины ребер DD_1 и D_1C_1 и вершину A. Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

Решение.

Пусть M и N — середины ребер DD_1 и D_1C_1. Продолжим MN до пересечения в точке L с продолжением ребра CD (рис. 12.74). Найдем искомый угол α между плоскостью ANL и гранью $ABCD$, проведя перпендикуляры NK и NE на AL и LC соответственно. Тогда получаем: $NE \perp ABCD \Rightarrow KE \perp AL \Rightarrow \alpha = \angle NKE$. Если a — ребро данного куба, то

$$LD = D_1N = \frac{a}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle ALD = \frac{AD}{LD} = 2 \Rightarrow \sin\angle ALD = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$KE = LE \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{NE}{KE} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12.465. Отношение объема правильной треугольной усеченной пирамиды к объему вписанного в нее шара равно k. Найти угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания и допустимые значения k.

Решение.

Пусть Q_1 и Q — центры оснований данной правильной усеченной пирамиды, MM_1 — апофема одной из ее граней, O — центр вписанного в пирамиду шара радиуса R, a и b — стороны оснований пирамиды, $\alpha = \angle M_1MQ$ (рис. 12.75).

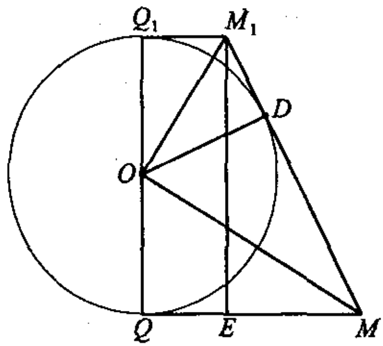


Рис. 12.75

Тогда имеем $Q_1M_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}, QM = \frac{b}{2\sqrt{3}}, Q_1Q = 2R$. Если $V_ш$ — объем вписанного шара, а $V_п$ — объем данной усеченной пирамиды, то

$$\frac{V_п}{V_ш} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\left(a^2+ab+b^2\right)}{8\pi R^2} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{8\pi R^2}\left((b-a)^2+3ab\right) = k.$$

Опустим радиус шара OD на апофему M_1M. Тогда

$$\angle M_1OM = 90° \Rightarrow R^2 = OD^2 = M_1D \cdot MD = Q_1M_1 \cdot QM = \frac{ab}{12}.$$

Если M_1E — высота трапеции Q_1M_1MQ, то

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ME}{M_1E} = \frac{b-a}{4\sqrt{3}R} \quad \left(ME = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right).$$

Окончательно получаем

$$k = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(\left(\frac{b-a}{R}\right)^2 + \frac{3ab}{R^2}\right) = \frac{36\operatorname{ctg}^2\alpha+27}{2\sqrt{3}\pi} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\pi k-27}}{6},$$

где $2\sqrt{3}\pi k - 27 > 0$.

Ответ: $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\pi k-27}}{6}$, где $k > \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

Решения к главе 13

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

13.372. Комиссионный магазин принял для продажи фотоаппараты, часы, авторучки и приемники на сумму 240 руб. Сумма цен приемника и одних часов на 4 руб. больше суммы цен фотоаппарата и авторучки, а цена авторучки равна целому числу рублей, не превосходящему 6. Количество принятых фотоаппаратов равно цене одного фотоаппарата в рублях, деленной на 10; количество принятых часов равно числу приемников, а также числу фотоаппаратов. Количество авторучек в три раза больше числа фотоаппаратов. Сколько всего предметов указанных наименований было принято магазином?

Решение.

Пусть x — цена одних часов, y — цена авторучки, z — цена приемника, t — цена фотоаппарата, n — число фотоаппаратов. Тогда по условию задачи запишем:

$$\left.\begin{array}{l} t=10n, \\ y\le 6, \\ z+x=y+t+4, \\ 3ny+nx+nz+nt=240, \\ n,\ y\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\le 6, \\ t=10n, \\ 3ny+n(y+2t+4)=240, \\ n,\ y\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5n^2+n(y+1)=60, \\ y\le 6, \\ n,\ y\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5n^2<60, \\ 5n^2+10n>60, \\ n\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n\le 3, \\ n\ge 3 \end{array}\right\} \Rightarrow n=3 \Rightarrow 6n=18.$$

Ответ: 18.

13.373. Вычислительная машина получила задание решить последовательно несколько задач. Регистрируя время выполнения задания, заметили, что на решение каждой следующей задачи машина затрачивала в одно и то же число раз меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач и сколько времени затрачено машиной на решение всех задач, если на решение всех задач, кроме первой, затрачено 63,5 мин, на решение всех задач, кроме последней, затрачено 127 мин, а на решение всех задач, кроме двух первых и двух последних, затрачено 30 мин?

Решение.

Если n — число задач, b — время решения первой задачи, q — знаменатель геометрической прогрессии, которую составляет время выполнения задач, то по формуле суммы первых членов геометрической прогрессии находим:

$$\left.\begin{array}{l} bq\cdot\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}=\dfrac{127}{2},\\ b\cdot\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}=127,\\ bq^2\cdot\dfrac{q^{n-4}-1}{q-1}=30\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{1}{2},\\ b\cdot\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}=127,\\ b\cdot\dfrac{q^{n-2}-q^2}{q-1}=30\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{q^{n-1}-1}{q^{n-1}-q^2}=\dfrac{127}{30}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{1}{2},\\ q^{n-2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\end{array}\right\}\Rightarrow n=8, b=64.$$

Время решения всех задач — 64 + 63,5 = 127,5.

Ответ: 8 задач; 127,5 мин.

13.374. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи оказались имеющими одинаковую длину, а через 2 ч после этого одинаковую длину стали иметь первая и вторая свечи. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья — за 8 ч?

Решение.

Если x — время сгорания первой свечи, l — длина свечей, то $\dfrac{l}{x}, \dfrac{l}{12}, \dfrac{l}{8}$ — скорости сгорания свечей. По условиям задачи через $\dfrac{\frac{l}{x}\cdot 1}{\frac{l}{8}-\frac{l}{x}}$ часов после того, как зажжена первая свеча, третья свеча сравняется по длине с первой, а через $\dfrac{\frac{l}{x}\cdot 1}{\frac{l}{12}-\frac{l}{x}}$ часов — вторая свеча сравняется по длине с первой. Имеем $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{12}-\frac{1}{x}}-\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{x}}=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=16,\\ x=6\end{array}\right.$.

Второе решение не подходит, так как должно быть $x>12$.

Ответ. 16 часов.

13.375. Найти трехзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.

Решение.

Если $\overline{xyz}$ — искомое трехзначное число, то

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=297\Leftrightarrow(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=297\Leftrightarrow x=z+3.$$

Так как по условию $y^2=xz=z(z+3)$, то y — четное число $\Rightarrow$

$\Rightarrow z(z+3)\,\vdots\,4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z\,\vdots\,4,\\ (z+3)\,\vdots\,4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=0,\\ z=4,\\ z+3=4,\\ z+3=8.\end{array}\right.$ В силу того, что $y^2=z(z+3)$, получаем, что $z=0$ или $z=1$. Отсюда $\overline{xyz}=421$ (число $\overline{xyz}=300$ не подходит, так как $\overline{zyx}=003$ не является трехзначным числом).

Ответ: 421.

13.376. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве первой цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет меньше искомого на $10a^{\log_{\sqrt{a}}3}$. Найти это число.

Решение.

Если $\overline{xy1}$ — искомое число, то

$$\overline{xy1}-\overline{1xy}=10^{\log_{\sqrt{a}}3}\Leftrightarrow(100x+10y+1)-(100+10x+y)=90\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x+y=21\Leftrightarrow\overline{xy}=21.$$

Ответ: 211.

13.377. Разность логарифмов цифр сотен и десятков трехзначного числа равна логарифму разности тех же цифр. Если из этого трехзначного числа вычесть число, имеющее обратный порядок цифр, то их разность будет равна положительному числу, у которого цифра сотен совпадает с цифрой десятков данного числа. Найти это число.

Решение.

Пусть $\overline{xyz}$ — искомое число, тогда по условию имеем $\log_a x - \log_a y =$ $= \log_a(x-y) \Rightarrow x = y(x-y) \Rightarrow x \vdots y \Rightarrow x = ny$, n — целое. Далее, получаем $ny = y(ny-y) \Rightarrow n = y(n-1) \Rightarrow n \vdots (n-1)$.

Так как n и $n-1$ — взаимно просты, то $n-1=1$, $y=2$, $x=4$.

По условию задачи

$$\overline{xyz} - \overline{zyx} = \overline{y**} \Rightarrow (400+20+z)-(100z+20+4) = \overline{2**} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 99(4-z) = \overline{2**} \Rightarrow 4-z=3 \Rightarrow z=1.$$

Ответ: 421.

13.378. В куске сплава массой 6 кг содержится медь. В куске другого сплава массой 8 кг содержится медь в ином процентном отношении, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть, а от второго — часть, вдвое большую по массе, по сравнению с первым. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

Решение.

Если x — масса части, отделенной от куска первого сплава, $p(q)$ — концентрация меди в первом (втором) сплаве, то $x+(8-2x)=8-x$ — масса третьего сплава, $2x+(6-x)=6+x$ — масса четвертого сплава, $px+(8-2x)q$ — количество меди в третьем сплаве, $p(6-x)+2xq$ — количество меди в четвертом сплаве. Так как концентрации меди в третьем и четвертом сплавах равны, то можно записать

$$\frac{px+(8-2x)q}{8-x} = \frac{p(6-x)+2xq}{6+x} \Leftrightarrow \frac{(px-qx)+(8q-xq)}{8-x} =$$

$$= \frac{(2xq-2xp)+(6p+xp)}{6+x} \Leftrightarrow \frac{x(p-q)}{8-x}+q = \frac{2x(q-p)}{6+x}+p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-q)x}{8-x}+\frac{2x(p-q)}{6+x} = p-q \Leftrightarrow \frac{x}{8-x}+\frac{2x}{6+x} = 1 \Rightarrow x = 2{,}4.$$

Ответ: 2,4 и 4,8 кг.

13.379. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массой p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найти массу частей, на которые был разбит бриллиант. Доказать, что наибольшая потеря в стоимости бриллианта происходит в том случае, когда обе его части равны по массе.

Решение.

Если x и $p-x$ — массы частей, на которые был разбит бриллиант, то по условию задачи записываем

$$\frac{p^2}{x^2+(p-x)^2}=k \Leftrightarrow 2kx^2-2pkx+p^2k-p^2=0,$$

откуда $x=\dfrac{pk\pm\sqrt{2kp^2-p^2k^2}}{2k}$, $\left.\begin{array}{l}2k-k^2\geq 0,\\ pk-\sqrt{2kp^2-p^2k^2}\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow 1\leq k\leq 2.$

Ясно, что наибольшая потеря в стоимости будет при наименьшем значении $x^2+(p-x)^2$. Наименьшее значение этой функции достигается при $x=\dfrac{p}{2}$.

Ответ: масса частей $\dfrac{pk\pm\sqrt{2kp^2-p^2k^2}}{2k}$, где $1\leq k\leq 2$.

13.380. Куплено несколько килограммов товара двух сортов: первого сорта на 4500 руб. и второго на 2000 руб., причем первого сорта куплено на 1 кг больше. Стоимость 1 кг товара первого сорта на $100a$ руб. выше стоимости 1 кг товара второго сорта. Сколько килограммов товара каждого сорта куплено? Определить число решений в зависимости от возможных значений a.

Решение.

Если x — масса (кг) товара первого сорта, то $\dfrac{4500}{x}$, $\dfrac{2000}{x-1}$ — стоимость 1 кг товара первого и второго сортов соответственно. Таким образом,

$$\frac{4500}{x}-\frac{2000}{x-1}=100a \Leftrightarrow ax^2-x(a+25)+45 \Leftrightarrow x=\frac{a+25\pm\sqrt{D}}{2a},$$

$D=(a-5)(a-125)$.

Так как по смыслу задачи $0<a\leq 45$, то $D\geq 0$ при $0<a\leq 5$. Кроме того, $x-1=\dfrac{25-a\pm\sqrt{D}}{2a}$ и $25-a-\sqrt{D}>0$ при $0<a\leq 5$.

Ответ: $\left(\frac{25+a+\sqrt{D}}{2a}, \frac{25-a+\sqrt{D}}{2a}\right)$ и $\left(\frac{25+a-\sqrt{D}}{2a}, \frac{25-a-\sqrt{D}}{2a}\right)$; задача имеет одно решение при $a=5$, два решения — при $0<a<5$, при остальных a решений нет.

13.381. Уголь, добываемый в пункте A, продается по q руб. за тонну, а добываемый в пункте B — на p% дороже. Пункты A и B соединяет дорога длиной s км. В какой зоне этой дороги AB расположены потребители угля, для которых закупка и доставка угля из B обходится дешевле, чем из A, если перевозка 1 т угля на расстояние 1 км обходится в r руб? В каком месте дороги AB расположено предприятие, расходы которого на потребление угля не зависят от выбора пункта A или B?

Решение.

Пусть потребитель угля расположен в x км от B, тогда затраты на закупку и доставку 1 т угля из A равны $r(s-x)+q$, из B — $rx+\frac{q(100+p)}{100}$.

Таким образом,

$$r(s-x)+q>\frac{100rx+q(100+p)}{100} \Leftrightarrow x<\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}.$$

Ответ: если $\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}<0$, то при любом x затраты на закупку и доставку угля из A будут меньше, чем из B; если $\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}\geq 0$, то при $x<\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}$ затраты на закупку и доставку угля из B будут меньше, чем из A, а при $x=\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}$ затраты не будут зависеть от выбора пункта A или B.

13.382. Точка P расположена на диаметре окружности радиуса R между концами диаметра AB. Из этой точки P движутся три единичные массы по направлениям отрезков PA, PB и PC так, что PC — полухорда, перпендикулярная диаметру AB. На каком расстоянии от A находится точка P, если известно, что скорости движения постоянны и за единицу времени первая масса достигла точки A, вторая — точки B, а третья — точки C? При этом израсходованная кинетическая энергия ($mv^2/2$) в сумме составляет a^2 единиц. В каких пределах можно изменять величину a^2, чтобы выполнялось условие задачи?

Решение.

Если $x = PA$, то $PB = 2R - x$, $PC^2 = PA \cdot PB = x(2R - x)$ (PC — высота прямоугольного DABC). Массы движущихся точек единичны, их скорости совпадают с соответствующими расстояниями PA, PB и PC (точки A, B, C достигаются за единицу времени). Следовательно, общая израсходованная энергия равна

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(2R-x)^2}{2} + \frac{x(2R-x)}{2} = a^2 \Leftrightarrow x^2 + (2R-x)^2 + x(2R-x) = 2a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = R \pm \sqrt{2a^2 - 3R^2} \Rightarrow PA = R + \sqrt{2a^2 - 3R^2},\ PB = R - \sqrt{2a^2 - 3R^2}.$$

Задача имеем смысл, если

$$R - \sqrt{2a^2 - 3R^2} > 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} R^2 > 2a^2 - 3R^2, \\ 2a^2 - 3R^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{3}{2}R^2 \leq a^2 < 2R^2.$$

Ответ: $R \pm \sqrt{2a^2 - 3R^2}$ при $\frac{3}{2}R^2 \leq a^2 < 2R^2$.

13.383. Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 ч дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было еще на 6 человек больше и каждый работал бы еще на 1 ч дольше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

Решение.

Пусть x — число рабочих, y — длительность (в часах) рабочего дня, t — производительность одного рабочего в час. Тогда $14xyt = 10(x+4)(y+1)t = 7(x+10)(y+2)t \Leftrightarrow$ (объем работы не меняется):

$$\begin{cases} 14xy = 10(x+4)(y+1), \\ 14xy = 7(x+10)(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 5x + 20y + 20, \\ xy = 2x + 10y + 20 \end{cases} \Rightarrow x = 20.$$

Ответ: 20 человек, 6 ч.

13.384. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч; первый, третий и пятый вместе — за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе — за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе — за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек, работая вместе?

Решение.

Пусть x_i — производительность i-го рабочего, y — объем работы. Тогда по условию задачи имеем следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=\frac{y}{7{,}5},\\ x_1+x_3+x_5&=\frac{y}{5},\\ x_1+x_3+x_4&=\frac{y}{6},\\ x_2+x_4+x_5&=\frac{y}{4}.\end{aligned}\right\}$$

Умножая последнее уравнение на 2 и затем складывая полученные четыре уравнения, находим

$$3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=y\left(\frac{1}{7{,}5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}=3.$$

Ответ: за 3 часа.

13.385. На соревнованиях авиамоделей с моторчиками лучшими оказались две модели. При встречном ветре первая модель продержалась в воздухе на m мин меньше второй, но пролетела на h м дальше. Скорость ветра равна c м/мин, но на продолжительность полета модели ветер не влияет; от ветра зависит только дальность полета. Какая из этих моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде, если их собственные скорости постоянны?

Решение.

Если z и $z+m$ — продолжительности полетов первой и второй моделей (они не зависят от ветра), а x и y — их собственные скорости полета, то первая модель пролетела $(x-c)z$ м, вторая $(y-c)(z+m)$ м.

Таким образом, получаем

$(x-c)\,z=(y-c)(z+m)+h\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xz-cz=y(z+m)-cz-cm+h\ \Leftrightarrow\ xz-y(z+m)=h-cm.$

Так как xz и $y(z+m)$ — расстояния, которые могут пролететь модели в безветренную погоду, то получаем следующий ответ.

Ответ: первая модель пролетит большее расстояние, если $h>cm$; вторая модель пролетит большее расстояние, если $h<cm$; при $h=cm$ они пролетят одинаковые расстояния.

13.386. На сторонах AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC соответственно расположены точки A_1, B_1, C_1 так что $AA_1=BB_1=$ $=CC_1=x$.

Сторона треугольника равна a. Найти такое x, при котором отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC было бы равно m. В каких пределах может изменяться величина m?

Решение.

По теореме косинусов для ΔA_1BB_1 имеем:

$$A_1B_1^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)\cos 60^\circ \Rightarrow m = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} =$$

$$= \frac{x^2 + (a-x)^2 - x(a-x)}{a^2} \Rightarrow 3x^2 - 3ax + a^2 - ma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{6}\left(3 \pm \sqrt{12m-3}\right).$$

Задача имеет смысл, если

$$3 - \sqrt{12m-3} > 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 9 > 12m-3, \\ 12m-3 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le m < 1.$$

Ответ: $\frac{a}{6}\left(3 \pm \sqrt{12m-3}\right)$ при $\frac{1}{4} \le m < 1$.

13.387. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по реке, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a ч они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до пункта B, лодка повернула обратно и догнала плот в пункте A. Собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в плавании плот и лодка?

Решение.

Если x — собственная скорость лодки, y — скорость течения реки, то до первой встречи лодка прошла расстояние $a(x-y)$, плот прошел ay, а расстояние между A и B равно ax. Время движения плота от B к A равно $a\frac{x}{y}$. Время движения лодки от A к B и обратно равно

$$\frac{ax}{x-y} + \frac{ax}{x+y}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{ax}{x-y} + \frac{ax}{x+y} = \frac{ax}{y} \Rightarrow x^2 - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \frac{ax}{y} = a\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $a\left(1+\sqrt{2}\right)$ ч.

13.388. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через a с — второй, еще через a с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в s м от конца дорожки, а первого — в r м от конца дорожки. Найти скорость первого и третьего пловцов и установить, при каких s и r задача имеет решение.

Решение.

Если x, y, z — скорости (м/с) пловцов, то $\frac{50+r}{z}$ и $\frac{50-r}{x}$ — время движения третьего и первого пловцов до момента их второй встречи, $\frac{50+s}{z}$ и $\frac{50-s}{y}$ — время движения третьего и второго пловцов до момента их второй встречи. По условию задачи получаем систему

$$\begin{cases} \frac{50+r}{z}=\frac{50-r}{x}-2a, \\ \frac{50+s}{z}=\frac{50-s}{y}-a. \end{cases}$$

Так как через некоторое время t после старта третьего три пловца оказались на одном расстоянии от старта, то

$$tz=(t+a)y=(t+2a)x \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{y}=\frac{t+a}{z}, \\ \frac{t+2a}{y}=\frac{t+a}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}.$$

Тогда из первой системы запишем:
$$\left.\begin{aligned} (50+r)\frac{1}{z}&=(50-r)\frac{1}{x}-2a, \\ (50+3s)\frac{1}{z}&=(50-s)\frac{1}{x}-2a. \end{aligned}\right\}$$

Умножая первое уравнение на $50-s$, второе на $50-r$ и вычитая полученные уравнения, находим:

$$\frac{1}{z}=\frac{(r-s)a}{100s-50r-rs} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{(3s-r)a}{100s-50r-rs}.$$

По смыслу задачи

$$r > s \Rightarrow z > 0 \Leftrightarrow 100s - 50r - rs > 0 \Leftrightarrow r < \frac{100s}{50+s};$$

$$3s > \frac{100s}{50+s} \Rightarrow 3s > r \Rightarrow x > 0.$$

Ответ: $x = \dfrac{100s - 50r - rs}{(3s - r)a}$, $z = \dfrac{100s - 50r - rs}{(r - s)a}$, $s < r < \dfrac{100s}{50+s}$.

13.389. От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого?

Решение.

Если y — масса каждого куска сплава, x — масса отрезанного куска, p и q — концентрация меди в первом и втором кусках сплава, то $px + q(y - x)$ и $qx + p(y - x)$ — количество меди в новых сплавах соответственно. Используя условие, находим:

$$\frac{px + q(y-x)}{y} = \frac{qx + p(y-x)}{y} \Rightarrow (p-q)x = (y-x)(p-q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y - x \Rightarrow y = 2x.$$

Ответ: в 2 раза.

13.390. Колонна автомобилей, движущихся равномерно с одной и той же скоростью, имеет длину 5 км. В последнем автомобиле находится начальник колонны, а рядом мотоциклист. По приказу начальника мотоциклист увеличил скорость, поровнялся с головной машиной, передал пакет, мгновенно развернулся и с той же скоростью, с какой ехал вперед, поехал обратно на свое место. Пока мотоциклист выполнял поручение, колонна продвинулась вперед на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

Решение.

Пусть x — *скорость мотоциклиста*, y — *скорость колонны*. Тогда

$\dfrac{5}{x-y}$ — время движения мотоциклиста от конца колонны к ее началу,

$\dfrac{5}{x+y}$ — время движения мотоциклиста от начала колонны к ее концу,

$\dfrac{5}{y}$ — время движения колонны, пока мотоциклист выполнял поручение.

Используя условие, запишем:

$$\frac{5}{x-y}+\frac{5}{x+y}=\frac{5}{y}\Rightarrow x^2-2xy-y^2=0\Rightarrow\frac{x}{y}=1+\sqrt{2}.$$

Мотоциклист проехал всего $\frac{5}{y}\cdot x=5\left(1+\sqrt{2}\right)$

Ответ: $5\left(1+\sqrt{2}\right)$км.

13.391. Из пунктов A и B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определить время встречи в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной.

Решение.

Если x и y — первоначальные скорости (км/мин) автомобилей, $2z$ — время (мин), через которое они встретились после выезда из A и B, то $2z(x+y)$ — расстояние между A и B, и

$$\begin{cases}2z(x+y)=(2z-56)(2x+y),\\ 2z(x+y)=(2z-65)(x+2y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}zx=28(2x+y),\\ 2zy=65(x+2y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{z-56}{28}=\dfrac{y}{x},\\ \dfrac{65}{2z-130}=\dfrac{y}{x}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{z-56}{28}=\dfrac{65}{2z-130},\\ z>65\end{cases}\Rightarrow z=91.$$

По смыслу задачи z — это время, через которое автомобили встретились бы, когда их скорость была бы удвоенной, поэтому $z=91$ мин.

Ответ: время встречи равно 10 ч 29 мин.

13.392. Из аэропорта к центру города вышел автомобиль, одновременно из центра города в аэропорт вышел автобус. Когда первый прошел половину пути, второму осталось до конца маршрута 19,2 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось до конца маршрута 12 км. Сколько километров остается пройти автобусу после того, как автомобиль закончит свой маршрут?

Решение.

Пусть скорость автомобиля в x раз больше скорости автобуса, s — расстояние между аэропортом и центром города. Тогда по условию запишем:

$$\begin{cases} \dfrac{s/2}{s-19{,}5}=x, \\ \dfrac{s-12}{s/2}=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=32, \\ x=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Когда автомобиль пройдет весь путь, автобус за это же время пройдет $\frac{4}{5}\cdot 32$ км, следовательно, ему останется пройти 6,4 км.

Ответ: 6,4 км.

13.393. Расстояние между двумя точками равно d. Под действием некоторых сил обе точки начинают равномерное движение навстречу друг другу. Чтобы они встретились на середине пути, первой точке нужно начать движение на t единиц времени раньше второй. Если же точки начнут сближаться одновременно, то через T единиц времени расстояние между ними составит k-ю часть ($k>1$) первоначального расстояния. Найти скорости движения точек.

Решение.

Пусть x и y — скорости точек. По первому условию задачи $\frac{d}{2x}-t=\frac{d}{2y}$, а по второму условию $T(x+y)=\frac{(k-1)}{k}d$. Отсюда получаем: $y^2-y(a-b)-\frac{ab}{2}=0$, где

$$a=\frac{(k-1)d}{kT}, b=\frac{d}{t}\Rightarrow y=\frac{a-b}{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=a-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\right).$$

Ответ: $\frac{k-1}{2kT}d\pm\frac{d}{2t}\left(1-\sqrt{1+\frac{(k-1)^2}{k^2T^2}t^2}\right)$.

13.394. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 10 км от их дома. Сначала они собрались идти на стадион пешком, но изменили намерение и решили воспользоваться велосипедом, договорившись, что один отправится на велосипеде, а другой одновременно с ним —

пешком. Проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до оставленного велосипеда, поедет на нем дальше и догонит первого у входа на стадион. Сколько времени выигрывают братья при этом по сравнению с первоначальным намерением идти весь путь пешком, если каждый из них на велосипеде преодолевает каждый километр на 12 мин быстрее, чем пешком?

Решение.

Так как братья прибыли на стадион одновременно (потратили на путь одинаковое время), то пешком (и на велосипеде) они прошли одинаковый путь. Так как в сумме пешком они прошли 10 км, то каждый из них прошел по 5 км и выигрыш во времени составит $5 \cdot 12 = 60$ мин.

Ответ: 1 ч.

13.395. Спортсмен, идя вдоль по шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет троллейбус и каждые 3 мин проходит встречный троллейбус. Найти, через какие промежутки времени отправляются троллейбусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее троллейбуса шел спортсмен, если допустить, что в обе стороны троллейбусы отправляются через одинаковые промежутки времени, идут без остановок с постоянной и одинаковой скоростью?

Решение.

Если x и y — скорости спортсмена и троллейбусов, t — интервал движения троллейбусов, то yt — расстояние между троллейбусами. Из условия получаем $\begin{cases} yz = 3(x+y), \\ yz = 6(y-x) \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{y}{3}; z = 4.$

Ответ: 4 мин; в 3 раза.

13.396. По расписанию занятий сначала из пункта А должен выехать один связист, а через 6 ч — второй связист с такой скоростью, чтобы нагнать первого в 180 км от пункта А. Однако в момент отправления первый связист получил распоряжение ехать со скоростью, на a км/ч большей, чем намечалось первоначально. Второму же связисту не разрешалось увеличивать скорость, поэтому, чтобы точно выполнить задание, ему пришлось выехать из пункта А на 3 ч раньше, чем намечалось. Сколько времени будет в пути каждый связист?

Решение.

Пусть x и y — первоначальные скорости первого и второго связистов, t — время в пути первого. По первоначальному плану $\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{y} = 6.$

В действительности же скорость стала $x + a$, а второй связист находился в пути $t - 3$ ч. Таким образом, имеем

$$t(x+a)=(t-3)y=180 \Rightarrow x=\frac{180-at}{z}, y=\frac{180}{t-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{180t}{180-at}-(t-3)=6 \Rightarrow t=\frac{-3a+3\sqrt{a^2+240a}}{2a}$$

и

$$t-3=\frac{-9a+3\sqrt{a^2+240a}}{2a}>0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+240a}>3a \Leftrightarrow a<30.$$

Ответ: $\frac{-3a+3\sqrt{a^2+240a}}{2a}$ ч; $\frac{-9a+3\sqrt{a^2+240a}}{2a}$ ч, при $a<30$.

13.397. Два поезда выходят одновременно из A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии p км от B. Через t ч после встречи второй поезд, миновав пункт A, находился в q км от него, а первый в это время, миновав пункт B, находился от второго поезда на расстоянии, в два раза большем, чем расстояние между A и B. Найти скорости поездов и расстояние между A и B.

Решение.

Пусть x и y — скорости поездов, s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{x+y}=\frac{p}{y}$ — время движения поездов до первой встречи; $ty=q+(s-p)$ — расстояние, которое прошел второй поезд после встречи, $t(x+y)$ — суммарное расстояние, которое прошли оба поезда после встречи. Таким образом, получаем $\begin{cases} \frac{s}{x+y}=\frac{p}{y}, \\ t(x+y)=2s, \\ ty=q+s-p. \end{cases}$

Перемножив первые два уравнения системы, имеем

$$s=3p-q, x=\frac{4p-2q}{t}.$$

Ответ: $\frac{4p-2q}{t}$ км/ч; $\frac{2p}{t}$ км/ч; $3p-q$ км.

13.398. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий автомобиль, в 30 км от базы — между этой базой и домом своего приятеля. Они тронулись в путь одновременно, причем владелец автомобиля поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца автомобиля, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость автомобиля?

Решение.

Если x и y — скорости (км/ч) пешехода и автомобиля, то $y \cdot 1$ — общее расстояние, которое проехал автомобиль, а $\frac{y-30}{2}$ — расстояние, которое проехал автомобиль до встречи с пешеходом, $16-\frac{y-30}{2}=\frac{62-y}{2}$ — расстояние, пройденное пешеходом до встречи. Отсюда $\frac{y-30}{2y}=\frac{62-y}{2x}$. Из условия задачи находим $\frac{5}{y}+2\frac{2}{3}=\frac{11}{x}$. Пришли к системе $\begin{cases}\frac{5}{y}+\frac{8}{3}=\frac{11}{x},\\ \frac{y-30}{y(62-y)}=\frac{1}{x}\end{cases} \Rightarrow y=60.$

Ответ: 60 км/ч.

13.399. Поезд был задержан на станции отправления на 1 ч 42 мин. Получив сигнал отправления, машинист повел состав по такому графику: на участке, составляющем 0,9 всего пути от станции отправления до станции назначения, он поддерживал скорость на 20 % выше обычной и 0,1 пути вел состав со скоростью на 25% выше обычной. В результате поезд прибыл на станцию назначения без опоздания. Какова продолжительность движения этого поезда между станциями при обычной скорости?

Решение.

Пусть s — расстояние между станциями, x — обычная скорость поезда. Тогда $\frac{0{,}9s}{1{,}2x}+\frac{0{,}1z}{1{,}25x}$ — время движения поезда, откуда

$$\frac{0{,}9s}{1{,}2x}+\frac{0{,}1s}{1{,}25x}=\frac{s}{x}-l\frac{42}{60} \Rightarrow \frac{s}{x}=10.$$

Ответ: 10 ч.

13.400. На шоссе последовательно расположены пункты D, A, C и B. Из A и B одновременно выехали мотоциклист и велосипедист в пункты

C и D соответственно. Встретившись в E, они обменялись машинами и каждый продолжал свой путь. В результате первый затратил на поездку от A до C 6 ч, а второй затратил на поездку от B до D 12 ч. Определить длину пути AB, если известно, что каждый едущий на мотоцикле развивает скорость 60 км/ч, а на велосипеде — 25 км/ч, и, кроме того, средняя скорость движения первого на пути AC равна средней скорости движения второго на пути BD.

Решение.

Если $x = DA,\ y = AE,\ z = EC,\ u = CB$, то $\frac{y}{60}+\frac{z}{25}$ — общее время движения первого, $\frac{z+u}{25}+\frac{x+y}{60}$ — общее время движения второго, $\frac{y}{60}=\frac{z+u}{25}$ — время их движения до встречи. Окончательно получаем

$$\begin{cases}\frac{y}{60}+\frac{z}{25}=6,\\ \frac{z+u}{25}+\frac{x+y}{60}=12,\\ \frac{y}{60}=\frac{z+u}{25},\\ \frac{y+z}{6}=\frac{x+y+z+u}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{z+u}{25}+\frac{z}{25}=6,\\ \frac{y}{60}+\frac{x+y}{60}=12,\\ y+z=x+u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z+u=150,\\ 2y+x=720,\\ y+z=x+u\end{cases}\Rightarrow y+z=290.$$

Так как $\frac{y}{60}+\frac{z}{25}=6,\ y=240,\ z=50,\ u=50,$ то $y+z+u=340.$

Ответ: 340 км.

13.401. На беговой дорожке одновременно стартовали два конькобежца на дистанцию s км. Когда победитель достиг финиша, другому осталось бежать еще целый круг. Определить длину беговой дорожки, если победитель, пробегая каждый круг на a с быстрее побежденного, закончил дистанцию за t мин.

Решение.

Пусть x — длина беговой дорожки (круга). По условию, $\frac{s}{60t}$ — скорость (м/сек) первого спортсмена, следовательно, $\frac{x}{s/60t}+a$ — время, за которое второй конькобежец пробегает один круг. Так как число кругов до финиша $\frac{s}{x}$, то $\left(\frac{s}{x}-1\right)\left(\frac{60xt}{s}+a\right)$ — время, за которое второй спортсмен пробегает $\frac{s}{x}-1$ кругов. По условию, за то же время, т.е. за $60t$ с, первый закончил дистанцию. Получаем

$$\left(\frac{s}{x}-1\right)\left(\frac{60xt}{s}+a\right)=60t \Rightarrow 60tx^2+sax-s^2a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-sa+\sqrt{s^2a^2+240tas^2}}{120t}.$$

Ответ: $\frac{s}{120t}\left(\sqrt{a^2+240at}-a\right)$ м.

13.402. Вместимости трех сосудов A, B, C, каждый из которых имеет форму куба, относятся как 1 : 8 : 27, а объемы налитой в них воды — как 1 : 2 : 3. После переливания части воды из сосуда A в сосуд B и из сосуда B в сосуд C во всех трех сосудах получили слой воды одинаковой глубины. Затем перелили $128\frac{4}{7}$ л воды из сосуда C в сосуд B, а после этого из сосуда B в сосуд A столько, что глубина воды в сосуде A стала вдвое больше, чем в сосуде B. При этом оказалось, что в сосуде A имеется теперь на 100 л воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

Решение.

Пусть x — первоначальный объем воды в сосуде A, a — линейный размер сосуда A. По условию $2x$ и $3x$ — объемы воды в B и C, $2a$ и $3a$ — линейные размеры B и C. Так как после первого переливания во всех сосудах получился слой воды одинаковой глубины, то объемы воды находились в отношении $a^2 : 4a^2 : 9a^2 = 1 : 4 : 9$. Значит, объем воды в A стал равным $\frac{6x}{1+4+9}$, объем воды в В — $\frac{6x}{14}\cdot 4$, а в сумме в A и B оказалось $\frac{15}{7}x$ л. После переливания из C это количество возросло на $128\frac{4}{7}$ л. И, наконец, после последнего переливания объемы воды в A и B

(по условию) распределились в отношении $2a^2 : 4a^2 = 1 : 2$, т.е. в A оказалось $\frac{1}{3}\left(\frac{15}{7}x+\frac{900}{7}\right)$ л.

Таким образом, имеем $\frac{1}{3}\left(\frac{15}{7}x+\frac{900}{7}\right)+100=x \Rightarrow x=500.$

Ответ: 500 л, 1000 л, 1500 л.

13.403. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в два раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в три раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

Решение.

Пусть x, y, z — объемы работ бригад. Тогда по условию $\begin{cases} x+z=2y, \\ y+z=3x \end{cases} \Rightarrow 4x=3y \Rightarrow y>x$, а из первого уравнения $z\ (y-x)+y$, т.е. $z>y$.

Ответ: третья бригада.

13.404. Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а второй — 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

Решение.

Пусть x и y — скорости движения (число ступенек в минуту) второго человека по неподвижному эскалатору и эскалатора соответственно, s — расстояние (в ступеньках), которое надо пройти по неподвижному эскалатору. Тогда $\frac{s}{2x+y}$ и $\frac{s}{x+y}$ — время спуска первого и второго (по движущемуся эскалатору). По условию, за время спуска первого «ушло» $s-60$ ступенек, откуда $\frac{s}{2x+y}\cdot y=s-60$. Аналогично $\frac{s}{x+y}\cdot y=s-40$.

Таким образом, имеем $\begin{cases} s=\frac{30(2x+y)}{x} \\ s=\frac{40(x+y)}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=60+30\frac{y}{x} \\ s=40+40\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow s=120.$

Ответ: 120 ступенек.

13.405. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

Решение.

Если x — расстояние между A и B, y — отношение скоростей первого и второго пешеходов, то

$$\left(\frac{x}{2}\right):(x-24)=y,(x-15):\left(\frac{x}{2}\right)=y \Rightarrow \frac{x}{2(x-24)}=\frac{2(x-15)}{x} \Rightarrow x=40$$

($x = 12$ не подходит, так как $x > 24$) откуда $y=\frac{5}{4}$. Значит, если первый пройдет 40 км, то второй пройдет 32 км.

Ответ: 8 км.

13.406. Три мотоциклиста проезжают с постоянными, но различными скоростями один и тот же участок AB дороги. Сначала пункт A проехал первый мотоциклист, а 5 с спустя в том же направлении — второй и третий. Через некоторое время первого мотоциклиста обогнал третий, и еще через 10 с его обогнал второй. За какое время первый мотоциклист проедет расстояние AB, если второй проехал это расстояние за 1 мин, а третий — за 40 с?

Решение.

Если s — расстояние между A и B, x — время (с), за которое первый мотоциклист пройдет это расстояние, то $\frac{s}{x}, \frac{s}{60}, \frac{s}{40}$ — скорости мотоциклистов, $\frac{5s}{x}$ — разность расстояний между ними в момент проезда вторым и третьим пункта A. Таким образом, имеем $\frac{5s}{x}:\left(\frac{s}{40}-\frac{s}{x}\right)$ — время, через которое третий догонит первого;

$\frac{5z}{x}:\left(\frac{s}{60}-\frac{s}{x}\right)$ — время, через которое второй догонит первого (с момента прохождения вторым и третьим пункта A). В итоге имеем

$$\frac{5}{x}:\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{x}\right)-\frac{5}{x}:\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{x}\right)=10 \Rightarrow x^2-110x+2400=0 \Rightarrow x=80$$

($x = 30$ не подходит, так как $x > 60$).

Ответ: 80 с.

13.407. К берегу водохранилища подошли трое: A, B и C; A отправился на противоположный берег вплавь со скоростью v км/ч; одновременно B и C отправились на моторной лодке со скоростью 10 v км/ч. Через некоторое время C решил остаток пути преодолеть вплавь и поплыл с той же скоростью, что и A. В тот же момент времени B повернул назад, чтобы взять в лодку A, который быстро садится в нее и продолжает путь вместе с B. На противоположном берегу все трое оказываются одновременно. Определить время переправы, если известно, что ширина водохранилища равна b км, а скорость течения равна нулю.

Решение.

Пусть S_1 — точка на берегу, с которой началась переправа, S_4 — точка, в которой она закончилась, S_2 — точка встречи A с лодкой, S_3 — точка высадки B с лодки. Так как А проплыл участок S_1S_2, C — участок S_3S_4 и они прибыли в S_4 одновременно, то $S_1S_2 = S_3S_4$. Возьмем $x = S_2S_3$.

Тогда $S_1S_2 = S_3S_4 = \frac{b-x}{2}$, и, таким образом, лодка прошла до встречи с A расстояние $\frac{b-x}{2} + 2x = \frac{b+3x}{2}$. Получаем

$$\frac{b+3x}{2} : \frac{b-x}{2} = 10v : v \Rightarrow x = \frac{9b}{13}.$$

Всего лодка прошла расстояние $b + 2x = \frac{31b}{13}$, следовательно, время переправы равно $\frac{31b}{130v}$.

Ответ: $\frac{31b}{130v}$ ч.

13.408. Между пунктами A и B, удаленными друг от друга на 3,01 м, совершает колебательное движение материальная частица m_1. Скорость ее постоянна, и на конечных пунктах она не задерживается. Через 11 с после выхода частицы m_1 из пункта A другая частица m_2 начинает двигаться из пункта B также с постоянной, но меньшей скоростью. Эта частица, двигаясь в направлении пункта A, дважды встречается с частицей m_1, а именно через 10 и 45 с после выхода второй частицы. Определить скорости частиц.

Решение.

Если x и y — скорости (см/с) частиц m_1 и m_2, то к моменту выхода частицы m_2 расстояние между m_1 и m_2 равно $301 - 11x$ см, откуда $301 - 11x = 10(x + y)$. Пусть C — место первой встречи частиц. Тогда $BC = 10y$, и поэтому к моменту второй встречи (через 35 с после первой) частица m_1 пройдет расстояние, на величину $CB + BC = 20y$ большее, чем частица m_2 (считая с момента первой встречи).

Таким образом, $\begin{cases}301-11x=10(x+y),\\20y=35(x-y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=11,\\y=7.\end{cases}$

Ответ: 11 см/с; 7 см/с.

13.409. Самоходный каток в состоянии укатывать полосу шириной 0,85 м, причем каждая последующая полоса перекрывает предыдущую на 1/4 ее ширины. С какой скоростью должен двигаться этот каток, чтобы за время, не большее 6 ч и не меньшее 5 ч, можно было дважды провести укатку участка шоссе длиной 750 м и шириной 6,5 м?

Решение.

По условию, одна прокатка катком участка шоссе добавляет полосу шириной $\frac{3}{4}\cdot 0{,}85=0{,}6375$ м, т.е. 10 проходов достаточно, чтобы укатать всю полосу. Таким образом, катку понадобится пройти 20 раз весь участок, т.е. 15 км. Значит, если x — его скорость, то

$$\frac{15}{6}\le x\le\frac{15}{5}\Rightarrow 2{,}5\le x\le 3.$$

Ответ: от 2,5 до 3 км/ч.

13.410. Вдоль сторон прямого угла по направлению к вершине движутся два шара радиусами 2 и 3 см, причем центры этих шаров перемещаются по сторонам угла с неравными, но постоянными скоростями. В некоторый момент времени центр меньшего шара находится на расстоянии 6 см от вершины, а центр большего — на расстоянии 16 см. Через 1 с расстояние между центрами стало 13 см, а еще через 2 с шары ударились, не дойдя до вершины. Найти скорости шаров.

Решение.

Если x и y — скорости шаров, то через 1 с расстояния от центров шаров до вершины угла равны $6-x$ и $16-y$, а через 3 с они равны $6-3x$ и $16-3y$. По теореме Пифагора имеем

$$\begin{cases}(6-x)^2+(16-y)^2=13^3,\\(6-3x)^2+(16-3y)^2=5^2\end{cases}$$

(так как в момент удара расстояние между центрами шаров равно 5 см).

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases}x^2+y^2=32y+12x-123,\\3\left(x^2+y^2\right)=32y+12x-89\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(32y+12x-123)=32y+12x-89,\\2\left(x^2+y^2\right)=34\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+8y=35,\\x^2+y^2=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=4.\end{cases}$$

Ответ: 1 см/с, 4 см/с.

13.411. Две точки A и B, первоначальное расстояние между которыми равно a, одновременно начали двигаться по разным сторонам прямого угла к его вершине с одной и той же скоростью v. Точка B достигает вершины на t единиц времени раньше, чем точка A (все измерения выполнены в одной системе единиц). Определить, сколько времени двигалась точка A. Какое значение надо придать величине a, чтобы искомое время приняло наименьшее из возможных значений?

Решение.

Пусть x — время движения точки A. Тогда точка A проходит расстояние $x \cdot v$ до вершины, а точка B — $(x-t)\,v$. По теореме Пифагора

$$x^2v^2+(x-t)^2v^2=a^2 \Leftrightarrow x\frac{vt\pm\sqrt{2a^2-v^2t^2}}{2v}.$$

Так как $x>t$, то подходит только одно значение x и при этом

$$\frac{vt+\sqrt{2a^2-v^2t^2}}{2v}>t \Leftrightarrow a>vt.$$

Ответ: $\dfrac{vt+\sqrt{2a^2-v^2t^2}}{2v}$, где $a>vt$.

13.412. Три совхоза расположены не на одной прямой. Расстояние от первого до третьего через второй вчетверо длиннее прямого пути между ними, расстояние от первого до второго через третий на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второго до третьего через первый равно 85 км. В каком интервале находятся значения a, для которых было бы возможным указанное расположение совхозов не на одной прямой? Вычислить расстояния между совхозами.

Решение.

Пусть x — расстояние между первым и вторым совхозами, y — расстояние между вторым и третьим, z — между первым и третьим. Тогда из условия получаем:

$$\begin{cases}x+z=85,\\x+y=4z,\\z+y=x+a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z-y=85-4z,\\z+2y=x+a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{170+a}{7},\\y=\dfrac{255+5a}{7},\\x=\dfrac{425-a}{7}.\end{cases}$$

Отсюда $y>z$ и $z+y$. Совхозы будут расположены не на одной прямой тогда и только тогда, когда $y < x + z$ (правило треугольника), откуда $a < 68$.

Ответ: $\frac{425-a}{7}, \frac{255+5a}{7}, \frac{170+a}{7}$ при $0 < a < 68$.

13.413. Сплав состоит из олова, меди и цинка. Если от этого сплава отделить 20 г и сплавить их с 2 г олова, то во вновь получившемся сплаве масса меди будет равна массе олова. Если же отделить от первоначального сплава 30 г и прибавить 9 г цинка, то в этом новом сплаве масса олова будет равна массе цинка. Определить в процентах состав первоначального сплава.

Решение.

Если x, y, z — концентрация меди, олова и цинка в сплаве, то из первого условия $20x = 20\ y + 2$, а из второго условия задачи $30y = 30\ z + 9$. Таким образом, получаем

$$\begin{cases} 10x = 10y + 1, \\ 10y = 10z + 3, \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 10y + 1, \\ 10y = 10(1 - x - y) + 3, \\ z = 1 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5, \\ y = 0{,}4, \\ z = 0{,}1. \end{cases}$$

Ответ: 50 %, 40 %, 10 %.

13.414. Из двух пунктов A и B одновременно выехали два инспектора к месту происшествия, в пункт C. Первый инспектор примчался в пункт C через a мин. Если второй инспектор будет стремиться попасть из пункта B в пункт C одновременно с первым, то ему придется на проезд каждого километра затрачивать на c мин меньше, чем первому, так как расстояние от B до C на b км больше расстояния от A до C. На каком расстоянии от пункта A случилось происшествие?

Решение.

Если x — расстояние между A и C, то $x + b$ — расстояние между B и C, $\frac{a}{x}$ и $\frac{a}{x+b}$ — время, которое потратит первый и второй инспекторы на проезд 1 км. По условию

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x+b} + c \Leftrightarrow cx^2 + bcx - ab = 0 \Rightarrow x = \frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c}.$$

Ответ: $\frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c}$ км.

13.415. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 4 ч после встречи велосипедист, ехавший из A, прибыл в B, а через 9 ч после втречи велосипедист, ехавший из B, прибыл в A. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

Решение.

Пусть x и y — время в пути первого и второго велосипедистов. Тогда $x-4=y-9$ — время движения каждого из них до встречи. Так как каждый из них после встречи прошел расстояние, равное расстоянию, пройденному другим до встречи, то $\frac{4}{y-9}=\frac{x-4}{9}$.

Пришли к системе:

$$\begin{cases} x=y-5, \\ \frac{4}{y-9}=\frac{x-4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10, \\ y=15. \end{cases}$$

Ответ: 10 ч., 15 ч.

13.416. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов (размеров) общей вместимостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то вместимость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были второго образца, то вместимость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить вместимость всех бочек каждого образца в отдельности.

Решение.

Пусть x и y — суммарные вместимости бочек первого и второго образцов, n и k — их число. Тогда $\frac{x}{n}$ и $\frac{y}{k}$ — вместимости одной бочки каждого образца. По условию получаем

$$\begin{cases} x+y=7000, \\ \frac{x}{n}(n+k)=8000, \\ \frac{y}{k}(n+k)=3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7000, \\ \frac{x}{8000}=\frac{n}{n+k}, \\ \frac{y}{3000}=\frac{k}{n+k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7000, \\ \frac{x}{8000}+\frac{y}{3000}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=6400,\ y=600.$$

Ответ: 6400 л, 600 л.

13.417. К яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а пчеле — расстояние в $2b$ м. Предположим, что траектории их полета — взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам путь шмеля и путь пчелы. Найти формулу, выражающую зависимость расстояния y между шмелем и пчелой от времени x их полета. Установить момент, когда в полете шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения.

Решение.

Пусть O — точка пересечения траекторий шмеля и пчелы. Тогда через время x расстояния шмеля и пчелы от точки O будут соответственно равны $\pm(xv_1 - a)$ и $\pm(xv_2 - b)$. Таким образом, по теореме Пифагора расстояние между шмелем и пчелой через время x будет равно

$$f(x) = \sqrt{(xv_1 - a)^2 + (xv_2 - b)^2},\ f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_1(xv_1 - a) + v_2(xv_2 - b) = 0 \Rightarrow x = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}$ мин (от начала полета).

13.418. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A с различными скоростями и едут к пункту B. Достигнув его, они тотчас же едут обратно. Первый велосипедист, ехавший быстрее второго, на обратном пути встречает второго на расстоянии a км от B; затем, достигнув A, едет снова по направлению к B и, пройдя k-ю часть пути AB, встречает второго велосипедиста, возвращающегося из B. Найти расстояние от A до B.

Решение.

Пусть s — растояние между A и B, x и y — скорости велосипедистов. К моменту первой встречи первый проехал расстояние $s + a$, второй — $s - a$, откуда $\dfrac{s+a}{s-a} = \dfrac{x}{y}$. К моменту второй встречи первый проехал $2s + \dfrac{z}{k}$ км, второй — $\left(z + \dfrac{k-1)}{k} z\right)$ км, откуда $\dfrac{(2k+1)s}{(2k-1)s} = \dfrac{x}{y}$. Таким образом, получаем

$$\frac{s+a}{s-a} = \frac{2k+1}{2k-1} \Rightarrow s = 2ak.$$

Ответ: $2ak$ км.

13.419. Два поезда длиной 490 и 210 м равномерно движутся навстречу друг другу по параллельным путям. Машинист одного из них заметил встречный состав на расстоянии 700 м; после этого через 28 с поезда встретились. Определить скорость каждого поезда, если известно, что первый проезжает мимо светофора на 35 с дольше второго.

Решение.

Пусть x и y — скорости (м/с) поездов. Из первого условия задачи $700 = 28(x + y)$. По второму условию $\frac{490}{x} - \frac{210}{y} = 35$.

Получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 25, \\ \frac{14}{x} - \frac{6}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 15. \end{cases}$

Ответ: 36 км/ч, 54 км/ч.

13.420. Кортеж автомобилей с космонавтами равномерно движется по проспекту со скоростью v км/ч. Протяженность кортежа постоянно сохраняется равной m м. Букет цветов, брошенный из окна дома, попал в коляску мотоциклиста, ехавшего сзади кортежа. Мотоциклист проехал вперед, передал букет космонавту, находившемуся в первом автомобиле, и тотчас отправился обратно. На проезд туда и обратно вдоль движущегося кортежа мотоциклисту потребовалось t мин. Вычислить скорость мотоциклиста, если она на всем пути была одинакова.

Решение.

Если x — скорость (км/ч) мотоциклиста, то он догонит начало кортежа через $\frac{m}{1000(x-v)}$ ч, а потом окажется в конце кортежа через $\frac{m}{1000(x+v)}$ ч. Таким образом, имеем

$$\frac{m}{1000(x-v)} + \frac{m}{1000(x+v)} = \frac{t}{60} \Rightarrow 25tx^2 - 3mx - 25tv^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3m + \sqrt{9m^2 + 2500t^2v^2}}{50t}.$$

Ответ: $x = \frac{3m + \sqrt{9m^2 + 2500t^2v^2}}{50t}$ км/ч.

13.421. Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если же в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти первоначальное значение делимого.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое число, z — делитель. Тогда по условию

$$\begin{cases} 10x + y = 3z + 8, \\ 10y + x = 2z + 5 \end{cases} \Rightarrow 17x - 28y = 1 \Leftrightarrow 28(x - y) = 1 + 11x.$$

Очевидно, что $12 \le 1 + 11x \le 1000$. На этом отрезке только числа 28, 56, 84 кратны 28. Проверкой убеждаемся, что подходит только $56 = 1 + 11x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 3$.

Ответ: 53.

13.422. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми по массе порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их ежедневно одинаковыми по массе, но иными, чем первый магазин, порциями. Через b дней, прошедших от начала перевозочных операций, на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозка закончилась одновременно, и масса арбузов, полученных первым магазином, равна массе арбузов, полученных вторым магазином?

Решение.

Пусть t — число дней, за которые были вывезены все арбузы с базы, x и y — ежедневное количество вывозимой продукции первым и вторым магазинами. Тогда xt — масса арбузов, вывезенных первым магазином, $y(t-a)$ — вторым. По условию, $xt = y(t-a)$. За b дней было вывезено $bx + (b-a)y$ продукции, что, по условию, равно $\frac{1}{2}\left(xt + y(t-a)\right)$.

Таким образом, получили

$$\begin{cases} tx = (t-a)y \\ (t-2b)x = (2b-t-a)y \end{cases} \Rightarrow \frac{t-a}{t} = \frac{2b-t-a}{t-2b} \Rightarrow t^2 - 2bt + ab = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = b + \sqrt{b^2 - ab}$$

($t = b - \sqrt{b^2 - ab}$ не подходит, так как $t > b$).

Ответ: $b + \sqrt{b(b-a)}$.

13.423. В бригаде землекопов каждый работает ежедневно по одинаковому числу часов. Известно, что производительность труда одинакова у всех рабочих бригады и при этом бригада может вырыть канаву для укладки кабеля за 6 дней. Однако еще до начала работы выяснилось, что рабочий день сокращается на 1 ч, а состав бригады уменьшается на 5 человек. В таком случае канава может быть вырыта за 9 дней. В действительности эту канаву рыли 12 дней, так как рабочий день был сокращен не на 1 ч, а на 2 ч, и два человека не вышли на работу по болезни. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и сколько часов они работали?

Решение.

Если x — первоначальное число рабочих, а $y+2$ — первоначально запланированная продолжительность их рабочего дня, то объем работы из первого условия задачи равен $6x(y+2)$, по второму условию — $9(x-5)(y+1)$; согласно третьему условию — $12(x-7)y$. Так как объем работы один и тот же, то получаем систему:

$$2x(y+2)=3(x-5)(y+1)=4(x-7)y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+4x=4xy-28y, \\ 2xy+4x=3xy-15y+3x-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y=x(y-2), \\ 15(y+1)=x(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6, \\ x=21. \end{cases}$$

Ответ: 21 человек, 6 ч.

13.424. Три машины производят некоторую работу. Если эту работу будет выполнять одна первая, то она закончит работу на a дней позже, чем при работе всех машин вместе. Если же эту работу будет выполнять вторая, то она закончит ее на b дней позже, чем все вместе, а если третья, то ей потребуется в c раз больше времени, чем всем машинам вместе. За сколько дней выполняет работу каждая из них в отдельности? Какие значения может принимать c?

Решение.

Пусть x, y, z — число дней, за которое первая, вторая и третья машины соответственно могут выполнить всю работу W по отдельности. Тогда $\frac{W}{x}, \frac{W}{y}, \frac{W}{z}$ — производительность машин, $\frac{z}{c}$ — время, за которое они выполняют всю работу вместе. Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x=\frac{z}{c}+a, \\ y=\frac{z}{c}+b, \\ W=\frac{z}{c}\left(\frac{W}{x}+\frac{W}{y}+\frac{W}{z}\right) \end{cases} \Rightarrow 1=\frac{z}{c}\left(\frac{c}{z+ac}+\frac{c}{z+bc}+\frac{1}{z}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c+1)z^2+z(ac+bc)+abc^2-abc^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{-c(a+b)+c\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}.$$

Так как $z > 0$, то $\sqrt{(a-b)^2+4abc^2} > a+b \Leftrightarrow c^2 > 1 \Leftrightarrow c > 1$.

Ответ: $a+\dfrac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$;

$b+\dfrac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$;

$\dfrac{-c(a+b)+c\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$, где $c > 1$.

13.425. Имеется n мензурок с жидкостью. Из первой мензурки перелили $1/n$ часть имеющейся там жидкости во вторую мензурку, затем из второй мензурки $1/n$ часть оказавшейся там после переливания из первой мензурки жидкости перелили в третью мензурку и т.д. Наконец, из n-й мензурки перелили $1/n$ часть оказавшейся в ней после переливания из предыдущей мензурки жидкости снова в первую мензурку. После этого в каждой мензурке оказалось по a см^3 жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждой мензурке?

Решение.

Пусть x_k — первоначальное содержание жидкости в k-й мензурке. После того как из k-й мензурки (при $k \geq 2$) перелили $\dfrac{1}{n}$ часть, в ней осталось, по условию, a см^3, что составляет $\dfrac{n-1}{n}$ часть от находившейся там жидкости до переливания. Таким образом, после переливания из $(k-1)$-й мензурки в k-й было $\dfrac{an}{n-1}$ см^3. Аналогично в $(k-1)$-й мензурке перед переливанием из нее жидкости было $\dfrac{an}{n-1}$ см^3, т.е. из нее в k-ю перелили $\dfrac{an}{n-1}$ см^3 (такие рассуждения верны при $k \geq 3$). Имеем $\dfrac{a}{n-1}+x_k=\dfrac{an}{n-1}$ при $k \geq 3 \Rightarrow x_k = a$ при $k \geq 3$.

Далее, $\dfrac{x_1}{n}+x_2=\dfrac{an}{n-1}$ (после первого переливания) и $\dfrac{a}{n-1}+\dfrac{n-1}{n}x_1=a$ (после последнего переливания), следовательно,

$$x_1=\frac{n(n-2)a}{(n-1)^2},\ x_2=\frac{\left(n^2-2n+2\right)a}{(n-1)^2}.$$

Ответ: $x_1=\frac{an(n-2)}{(n-1)^2}$ см^3, $x_2=\frac{a\left(n^2-2n+2\right)}{(n-1)^2}$ см^3, $x_3=\ldots=x_n=a$ см^3.

13.426. Для наполнения водой бассейна были поставлены два насоса. Один первый насос может наполнить бассейн на 8 ч скорее, чем один второй. Сначала был открыт только один второй насос на время, равное удвоенному количеству времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна при одновременном действии обоих насосов. Затем открыли также первый насос, и через 1,5 ч после того как был открыт первый насос, бассейн наполнился водой. За сколько часов каждый из насосов, работая порознь, может наполнить бассейн?

Решение.

Если x и y — производительности насосов, z — объем работы, то $\frac{z}{x+y}$ — время, за которое можно наполнить бассейн при одновременной работе насосов. Из условия получаем

$$\begin{cases}\frac{z}{y}-\frac{z}{x}=8,\\ \frac{2z}{x+y}\cdot y+1{,}5(x+y)=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z(x-y)=8xy,\\ \frac{3}{2}(x+y)=\frac{z(x-y)}{x+y}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{2}(x+y)=\frac{8xy}{x+y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-10xy+3y^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3y,\\ x=\frac{y}{3}.\end{array}\right.$$

Так как $x>y$, то $x=3y$. Тогда из первого уравнения системы имеем $\frac{z}{y}=12,\ \frac{z}{x}=4.$

Ответ: 4 ч, 12 ч.

13.427. Пройдя через фильтр, жидкость равномерно вливается в 40-ведерную бочку и может выливаться через кран, имеющийся в дне бочки. Если этот кран открыт, то приток и отток жидкости таковы, что за каждые 4 мин в бочке убавляется одно ведро. За какое время отфильтрованная жидкость наполнит пустую бочку при закрытом нижнем кране, если известно, что для этого потребуется на 3 мин меньше того времени, за которое открытый нижний кран способен пропустить 66 ведер?

Решение.

Пусть x и y — скорости (ведро/мин) прохождения жидкости через фильтр и кран соответственно. Тогда из условия имеем

$$\begin{cases} 4(y-x)=1, \\ \dfrac{66}{y}-\dfrac{40}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(y-x)=1, \\ 26x-40(y-x)=3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(y-x)=1, \\ 26x-10=3xy \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2-101x+40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=\dfrac{5}{12} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{40}{x}=5, \\ \dfrac{40}{x}=96. \end{array}\right.$$

Ответ: 96 мин или 5 мин.

13.428. Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только первый станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на втором и третьем станках; затем действовал только второй станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и третьем станках. Остальная часть партии деталей была обработана на третьем станке в течение стольких часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и втором станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно все три станка?

Решение.

Пусть x, y, z — производительности станков, W — объем работы. По условию $\dfrac{W}{y+z}$ — время работы первого станка, $\dfrac{W}{x+z}$ — второго, $\dfrac{W}{x+y}$ — третьего. Таким образом, имеем

$$\frac{Wx}{y+z}+\frac{Wy}{x+z}+\frac{Wz}{x+y}=W \Rightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=1.$$

Очевидно, что $\dfrac{W}{x+y+z}$ — время, за которое была бы выполнена работа при одновременной работе всех станков.

По условию задачи требуется найти число k, где

$$k=\frac{\frac{W}{x+y}+\frac{W}{x+z}+\frac{W}{z+y}}{\frac{W}{x+y+z}}=\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{y+z}=$$

$$=\left(1+\frac{z}{x+y}\right)+\left(1+\frac{y}{x+z}\right)+\left(1+\frac{x}{y+z}\right)=3+\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)=4.$$

Ответ: в 4 раза.

13.429. Сначала катер шел a км по озеру, а затем половину этого расстояния по реке, впадающей в озеро. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна c км/ч. При каком соотношении между a и c рейс неосуществим?

Решение.

Если x — скорость катера (км/ч), то $\frac{a}{x}$ — время движения его по озеру, $\frac{a}{2(x-c)}$ — время его движения по реке. Из условия имеем:

$$\frac{a}{x}+\frac{a}{2(x-c)}=1\Rightarrow 2x^2-x(2c+3a)+2ac=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3a+2c\pm\sqrt{9a^2-4ac+4c^2}}{4}.$$

Так как $x>c$, то подходит только первый корень. При этом подкоренное выражение положительно для любых допустимых значений a и c, т.е. такой рейс всегда осуществим.

Ответ: $\frac{3a+2c+\sqrt{9a^2-4ac+4c^2}}{4}$ км/ч при любых $a>0$, $c>0$.

13.430. Из Москвы в город N пассажир может отправиться поездом. В этом случае он пробудет в пути 20 ч. Если же он дождется отправления самолета (а ждать придется более 5 ч после отправления поезда), то пассажир доберется до города N через 10 ч, включая и время ожидания. Протяженности трассы самолета и железнодорожного пути одинаковы. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда, если известно, что самолет окажется над этим поездом через 8/9 ч после отправления из аэропорта и пролетит к этому моменту столько же километров, сколько пройдет поезд?

Решение.

Если x и y — скорости (км/ч) поезда и самолета соответственно, t — время ожидания отправления самолета, то $\frac{8}{9}y$ — расстояние, которое пролетит самолет до встречи с поездом. Из условия $\frac{8}{9}y = x\left(z+\frac{8}{9}\right)$ и $20x = (10-z)y$ — расстояние до города N.

Пусть $k = \frac{y}{x}$, тогда получаем

$$\begin{cases} k = \frac{9}{8}\left(t+\frac{8}{9}\right), \\ k = \frac{20}{10-t}, \\ t > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{8k-8}{9}, \\ t = \frac{10k-20}{t}, \\ \frac{10k-20}{k} > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k^2 - 49k + 9 = 0, \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = 10.$$

Ответ: в 10 раз.

13.431. Известно, что разность переменных величин y и z пропорциональна величине x, а разность величин z и x пропорциональна величине y. Коэффициенты этих пропорциональностей равны соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 \neq k_2$. Некоторое значение величины z в три раза больше разности соответствующих значений x и y. Доказать, что если каждый из коэффициентов k_1 и k_2 увеличить на 3, то произведение полученных чисел будет равно числу 8 (предполагается, что величины x и y не принимают нулевых значений).

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{cases} y - z = k_1 x, \\ z - x = k_2 y, \\ z = 3(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 3(x-y) = k_1 x, \\ 3(x-y) - x = k_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y = (k_1+3)x, \\ 2x = (k_2+3)y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = (k_1+3)(k_2+3),$$

что и требовалось доказать.

13.432. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на a с меньше, чем второй. Если они начинают пробег с общего старта и в одном направлении, то сходятся через каждые b с. Через какое время они встретятся, если побегут в противоположных направлениях по той же дорожке с прежними скоростями?

Решение.

Пусть x, y — скорости спортсменов, z — длина беговой дорожки. Тогда из условия имеем

$$\begin{cases}\dfrac{z}{y}-\dfrac{z}{x}=a,\\ \dfrac{z}{x-y}=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{z}{y}-\dfrac{z}{x}=a,\\ \dfrac{x}{z}-\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{b}.\end{cases}$$

Если $\dfrac{x}{z}=w, \dfrac{y}{z}=t$, то получаем $\begin{cases}\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{w}=a,\\ w-t=\dfrac{1}{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{tw}=a,\\ w-t=\dfrac{1}{b}\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{ab}=tw,\\ \dfrac{1}{b}=w-t\end{cases} \Rightarrow t^2+t\cdot\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}=0 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{a^2+4ab}-a}{2ab},$$

$$w=\frac{\sqrt{a^2+4ab}+a}{2ab} \Rightarrow t+w=\frac{\sqrt{a^2+4ab}}{ab} \Rightarrow \frac{ab}{\sqrt{a^2 4ab}}=\frac{1}{t+w}=\frac{z}{x+y},$$

где $\dfrac{z}{x+y}$ и есть то время, через которое спортсмены встретятся, если побегут в разных направлениях.

Ответ: $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+4ab}}$ с.

13.433. Предприятие A, потребляющее лед, закупает его в пункте B по цене a руб. за тонну. Иногда этому предприятию приходится закупать лед в другом пункте C по цене $1{,}5a$ руб. за тонну. Оба изготовителя сами доставляют потребителю A закупленный им лед, начисляя за перевозку по p руб. за тоннокилометр. Потеря в массе, происходящая при транспортировке от таяния льда, составляет $n/1000$ массы на километр пути. Предприятие A расположено между B и C, а каждая тонна фактически полученного льда обходится предприятию A одинаково (в рублях) при доставке как из пункта B, так и из пункта C. Во сколько рублей обходится предприятию A тонна получаемого льда, если известно, что расстояние от B до C через A равно s км?

Решение.

Пусть x и y — расстояние между B и A и между C и A соответственно, z — исходная цена 1 т льда. Тогда в A доставляется $\left(1-\dfrac{xn}{1000}\right)$ часть от каждой тонны льда, отправляемой из B, и $\left(1-\frac{yn}{1000}\right)$ часть от каждой тонны льда, отправляемой из C. Из условия, имеем

$$\begin{cases} z\left(1-\dfrac{xn}{1000}\right)=a+px, \\ z\left(a-\dfrac{yn}{1000}\right)=1{,}5+py \end{cases} \Rightarrow z\left(2-\frac{n}{1000}(x+y)\right)=2{,}5a+p(x+y)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\left(2-\frac{ns}{1000}\right)=2{,}5a+ps \Rightarrow z=\frac{(2{,}5a+ps)1000}{2000-ns}.$$

Ответ: $\dfrac{(2{,}5a+ps)1000}{2000-ns}$ руб.

13.434. Доказать, что куб наибольшего из трех последовательных натуральных чисел не может быть равен сумме кубов двух других чисел.

Решение.

Пусть $n-1$, n, $n+1$ — любые последовательные натуральные числа. Имеет место равенство

$(n+1)^3=n^3+(n-1)^3 \Rightarrow n^3=2(3n^2+1) \Rightarrow n=2k \Rightarrow 4k^3=12k^2+1.$

Получено противоречие, так как $12k^2+1$ — нечетное число. Что и требовалось доказать.

13.435. Искомое число больше 400 и меньше 500. Найти его, если сумма его цифр равна 9 и оно равно 47/36 числа, изображенного теми же цифрами, но написанными в обратном порядке.

Решение.

Пусть $\overline{xyz}$ — искомое число. По условию имеем

$$\begin{cases} 36(100x+10y+z)=47(100z+10y+x), \\ x+y+z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3553x=110y+4664z, \\ y=9-x-z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3553x=110(9-x-z)+4664z \Rightarrow 37x=10+46z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 37(x-z)=10+9z.$$

Так как $1\le z\le 9$, то $19\le 10+9z\le 91$. На этом отрезке имеется только два числа, кратных 37: 37 и 74. Так как $74 \ne 10+9z$, то $37=10+9z$, $z=3 \Rightarrow x=4$, $y=2$.

Ответ: 423.

13.436. На участке реки от A до B течение так невелико, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение оказывает влияние на движение лодки. Лодка покрывает расстояние вниз от A до C за 6 ч, а вверх от C до A — за 7 ч. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 ч. Сколько времени в этом случае понадобилось бы той же лодке на движение вверх от C до A? Собственная скорость лодки неизменна во всех случаях.

Решение.

Пусть x — скорость лодки относительно берега по течению реки, y — скорость лодки относительно берега против течения реки. Тогда $\frac{x+y}{2}$ — собственная скорость лодки. Если t — время, за которое лодка проходит участок от A к B (или от B к A), где нет течения реки, то участок от B к C она проходит за $(6-t)$ ч, участок от C к B — за $(7-t)$ ч. Имеем $\frac{6-t}{7-t}=\frac{y}{x}$.

Если бы течение появилось на участке от A до B, то лодка прошла бы участок от A до B за $(t-0{,}5)$ ч (по условию). Таким образом, $\frac{z-0{,}5}{z}=\frac{\frac{x+y}{2}}{x}$. Получили систему:

$$\begin{cases}\frac{6-t}{7-t}=\frac{y}{x},\\ \frac{2t-1}{t}=\frac{x+y}{x}\end{cases}\Rightarrow\frac{6-t}{7-t}=\frac{t-1}{t}\Rightarrow z=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{5}{7}.$$

Следовательно, участок от C до A лодка прошла бы в 7/5 медленнее, чем участок от A до C, т.е. за $5{,}5\cdot\frac{7}{5}=7{,}7$ ч.

Ответ: 7,7 ч.

13.437. На какое целое положительное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25 % от частного?

Решение.

Пусть n — искомое число, m — остаток от деления 180 на n, k — частное. Тогда $\begin{cases}180=n\cdot k+m,\\ 4m=k,\\ m<n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}180=m(4n+1),\\ m<n.\end{cases}$

Таким образом, m кратно 4 ($4n+1$ — нечетное), и

$180 > 4mn > 4m^2 \Rightarrow m^2 < 45 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow 4n + 1 = 45 \Rightarrow n = 11$.

Ответ: 11.

13.438. Смешав по 2 см³ трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимают объем, на 0,5 см³ больший, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого.

Решение.

Если x, y, z — плотности трех веществ, то из условия получаем

систему $\begin{cases} 2x+2y+2z=16, \\ \frac{4}{y}-\frac{4}{z}=0{,}5, \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow z=4.$

Ответ: 4 г/см³.

13.439. Если искомое двузначное число увеличить на 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Найти это число при условии, что сумма его цифр равна 14.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое число, z — число, полученное из $\overline{xy}$ добавлением 46. Тогда $y = 14 - x$, $10x + y + 46 = z \Rightarrow 9x + 60 = z$. Полученное число z может быть двузначным или трехзначным.

Имеем:

1) $z = \overline{ab}$. Тогда $9x + 60 = 10a + b = 9a + (a + b)$, т.е. $a + b$ кратно 3. Так как по условию $a \cdot b = 6$, то одно из чисел a, b кратно 3, а значит, и второе кратно 3, что невозможно;

2) $z = \overline{cab}$. Тогда $c = 1$ и $9x + 60 = 100 + 10a + b \Rightarrow 9x = 40 + 10a + b \Rightarrow$ $\Rightarrow 9(x - a - 4) = 4 + a + b$, т.е. $a + b + 4$ кратно 9. Но $a \le 6$, $b \le 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b + 4 \le 16 \Rightarrow a + b + 4 = 9 \Rightarrow a + b = 5$;

С учетом $a \cdot b = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, b=3, \\ a=3, b=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=123, \\ z=132 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{xy}=77, \\ \overline{xy}=86 \end{array}\right.$.

Ответ: 77 или 86.

13.440. Даны две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, а также точка $A(a, a)$, где $a > 0$. Требуется найти координаты такой точки M на оси Ox и такой точки P на оси Oy, чтобы треугольник AMP был равносторонним.

Решение.

Пусть $(0, y)$ и $(x, 0)$ — координаты точек P и M соответственно. Так как ΔAMP равносторонний, то

$$x^2+y^2=(a-x)^2+a^2=(a-y)^2+a^2 \Rightarrow (a-x)^2=(a-y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y, \\ 2a=x+y. \end{array}\right.$$

Имеем:

1) если $x=y$, то

$$2x^2=(a-x)^2+a^2 \Rightarrow x^2+2ax-2a^2=0 \Rightarrow x=y=-a\pm\sqrt{3a^2};$$

2) при $y=2a-x$ получаем

$$x^2+(2a-x)^2=(a-x)^2+a^2 \Rightarrow x^2-2ax+2a^2=0 \Rightarrow (x-a)^2+a^2=0, \varnothing.$$

Ответ: $M(a(\sqrt{3}-1);0), P(0;a(\sqrt{3}-1))$ или $M(-a(\sqrt{3}+1);0), P(0;-a(\sqrt{3}+1))$.

13.441. На расстоянии l м от моста A вниз по течению реки расположен мост B. Когда спортсмен проплывал мимо моста A, направляясь к мосту B, ему бросили два мяча. Первый мяч он подхватил, а второй оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил мяч и поплыл вверх по реке за вторым мячом. Подхватив второй мяч, снова повернул по направлению к мосту B и достиг его одновременно со свободно плывшим первым мячом. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость все время была в k раз больше скорости течения?

Решение.

Пусть D — точка, в которой пловец оставил первый мяч и повернул обратно, C — точка, в которой он подобрал второй мяч, x — скорость (м/мин) течения реки, y — расстояние между C и D. Так как первый мяч свободно проплыл расстояние DB, а второй — расстояние AC, и они одновременно оказались в B, то $DB = AC$ (ибо участки AD и CB они «прошли» с одинаковой скоростью, равной $(k+1)x$). Поэтому $AC=\frac{l-y}{2}$, $\frac{l-y}{2x}$ — время свободного движения второго мяча до встречи с пловцом, $\frac{l+y}{2x(k+1)}$ — время, за которое пловец проплыл участок AD, $\frac{y}{x(k-1)}$ — время, за которое он проплыл участок DC ($x(k-1)$ — скорость пловца против течения), откуда $\frac{l-y}{2x}=\frac{l+x}{2x(k+1)}+\frac{y}{x(k-1)}\Rightarrow y=l\cdot\frac{k-1}{k+3}\Rightarrow 2y+l=l\cdot\frac{3k+1}{k+3}$ — общее расстояние, которое проплыл пловец.

Ответ: $l\cdot\frac{3k+1}{k+3}$ м.

13.442. В магазин поступил товар первого и второго сорта на сумму в 450 млн. руб. Экспертиза установила, что весь поступивший товар можно продавать только по цене второго сорта, в результате чего фирма потерпела бы убыток в сумме 50 млн. руб. Фирма устранила дефекты в товаре первого сорта и товар второго сорта довела до кондиции первого сорта. Получив разрешение продавать весь товар по цене первого сорта, магазин дал фирме прибыль в сумме 30 млн. руб. В какую сумму оценивался первоначально весь товар первого сорта и весь товар второго сорта отдельно?

Решение.

Если x и y (млн. руб.) — стоимости товара первого и второго сорта соответственно; a и b — количество товара первого и второго сорта, то $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ — стоимость единицы товара первого и второго сорта.

Из условия получаем

$$\begin{cases} x+y=450, \\ \frac{x}{a}(a+b)=450+30, \\ \frac{y}{b}(a+b)=450-50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=450, \\ 1+\frac{b}{a}=\frac{480}{x}, \\ 1+\frac{a}{b}=\frac{400}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=450, \\ \left(\frac{480}{x}-1\right)\left(\frac{400}{y}-1\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=300, \\ y=150. \end{cases}$$

Ответ: 300 млн. руб., 150 млн. руб.

13.443. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ часть раствора в пробирку, а раствор, оставшийся в колбе, выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится вдвое. После этого вливают в колбу раствор из пробирки. В результате содержание соли в растворе повысилось на p% по сравнению с первоначальным. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе. Какую часть первоначального раствора следовало отлить, чтобы в результате описанной процедуры процентное содержание соли увеличилось в полтора раза?

Решение.

Пусть x — первоначальное процентное содержание соли, y — объем раствора. После отливания $\frac{1}{n}$ части в колбе осталось $\frac{n-1}{n}\cdot y$ раствора. Так как после выпаривания воды процентное содержание соли в колбе повысилось в два раза, то объем раствора в два раза уменьшился, т.е. стал равным $\frac{n-1}{2n}\cdot y$. После переливания раствора из пробирки объем его стал $\left(\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{n}\right)y=\frac{n+1}{2n}\cdot y$. Так как количество соли в результате осталось прежним, то

$$y\cdot\frac{x}{100}=\frac{n+1}{2n}\cdot y\cdot\frac{(x+p)}{100}\Rightarrow x=\frac{n+1}{n-1}\cdot p.$$

Аналогично, если бы в результате тех же действий процентное содержание соли в пробирке стало равным $\frac{3}{2}x$, то

$$xy=\frac{n+1}{2n}\cdot y\cdot\frac{3}{2}x\Rightarrow n=3.$$

Ответ: $\frac{n+1}{n-1}\cdot p\%$; $\frac{1}{3}$ часть.

13.444. Значениями длин сторон треугольника и его площади являются соответственно четыре последовательных целых числа. Найти длины сторон этого треугольника.

Решение.

Из условия, стороны треугольника равны $n-1$, n, $n+1$, а площадь равна $n+2$, где n — натуральное. По формуле Герона

$$n+2=\sqrt{\frac{3n}{2}\cdot\left(\frac{3n}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{3n}{2}-n+1\right)\cdot\left(\frac{3n}{2}-n-1\right)}\Rightarrow 16(n+2)=3n^2(n-2).$$

Таким образом, n — четное, т.е. $n=2k$, поэтому $4(k+1)=3k^2(k-1)$. Так как k и $k+1$ — взаимно просты, то 4 кратно $k^2\Rightarrow k^2=4\Rightarrow$ $\Rightarrow n=4$.

Ответ: 3, 4, 5.

13.445. На столе стоит цилиндрическая банка с водой. Радиус основания банки равен R. Если в банку опустить шарик радиуса r, то он ляжет на дно банки, а поверхность воды при этом поднимется настолько, что окажется касательной к шарику. Доказать, что произойдет то же самое, если в эту банку с тем же количеством воды опустить вместо данного шарика шарик другого радиуса. Найти радиус нового шарика и установить условия, при которых он будет больше или меньше радиуса данного шарика.

Решение.

Если x — радиус нового шарика, то объем V воды в бане равен объему цилиндра с основанием радиуса R и высотой, равной диаметру шарика, за вычетом объема шарика, т.е. $V = \pi R^2 \cdot 2x - \frac{4}{3}\pi x^3$. Так как количество воды не меняется, то

$$2\pi R^2 x - \frac{4}{3}\pi x^3 = 2\pi R^2 r - \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r-x)R^2 = \frac{2}{3}(r-x)\left(r^2 + rx + x^2\right) \Rightarrow 3R^2 = 2\left(r^2 + rx + x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-r + \sqrt{6R^2 - 3r^2}}{2}.$$

Имеем

$$\left.\begin{matrix} x < r, \\ r \le R \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{6R^2 - 3r^2} < 3r, \\ R \ge r \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{r}{R} \le 1;$$

$$\left.\begin{matrix} x > r, \\ x \le R \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{6R^2 - 3r^2} > 3r, \\ \sqrt{6R^2 - 3r^2} \le 2R + r \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{r}{R} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right) - 1 \ge 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{r}{R} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{r}{R} \ge \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Ответ: $x = \frac{-r + \sqrt{6R^2 - 3r^2}}{2}$, причем $x < r \le R$ при $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{r}{R} \le 1$; и $r < x \le R$ при $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \le \frac{r}{R} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13.446. Из одного и того же пункта одновременно в одном направлении по прямолинейному участку шоссе с постоянными, но различными скоростями вышли два пешехода. Через 2 ч расстояние между ними было s км. После этого пешеходы стали идти быстрее и затрачивать на каждый километр пути на 10 мин меньше. Еще через 2 ч расстояние между ними стало равным $3s$ км. Найти расстояния, пройденные пешеходами за первые два часа движения.

Решение.

Если x — расстояние (км), пройденное первым пешеходом за первые 2 ч, то $\frac{120}{x}$ — количество минут, затрачиваемое им на прохождение 1 км пути. Аналогично $\frac{120}{x+s}$ — количество минут, затрачиваемое вторым пешеходом на прохождение 1 км пути. После увеличения скорости первый и второй, стали затрачивать на прохождение 1 км пути соответственно $\frac{120}{x}-10$ и $\frac{120}{x+s}-10$ мин. Значит, за последующие 2 часа каждый из них прошел соответственно по $\frac{120}{\frac{120}{x}-10}$ и $\frac{120}{\frac{120}{x+s}-10}$ км.

Таким образом,

$$\frac{120}{\frac{120}{x+s}-10}-\frac{120}{\frac{120}{x}-10}=2s \Rightarrow x^2+(s-24)x+72-12s=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{24-s\pm\sqrt{s^2+288}}{2}.$$

Если $x=\frac{24-s+\sqrt{s^2+288}}{2}$, то, $x>12$ и $\frac{120}{x}<10$, что не подходит по смыслу задачи.

Значит, $x=\frac{24-s-\sqrt{s^2+288}}{2}$.

Ответ: $\frac{24-s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ км, $\frac{s+24-\sqrt{s^2+288}}{2}$ км.

13.447. Сравнивая два бруска, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, установили, что длина, ширина и высота второго бруска соответственно на 1 см больше, чем первого бруска, а объем и полная поверхность второго бруска соответственно на 18 см^3 и 30 см^2 больше, чем первого. Какова величина полной поверхности первого бруска?

Решение.

Пусть x, y, z — линейные размеры первого бруска. Тогда $x+1$, $y+1$, $z+1$ — линейные размеры второго. Из условия имеем:

$$\begin{cases} xyz+18=(x+1)(y+1)(z+1), \\ 2(xy+yz+xz)+30=2[(x+1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(x+1)(z+1)] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z+xy+xz+yz=17, \\ x+y+z=6 \end{cases} \Rightarrow xy+xz+yz=11,$$

$2(xy+xz+yz)=22$ — полная поверхность первого бруска.

Ответ: 22 см^2.

13.448. Со станции A отошли два поезда с интервалом в 12 мин и практически сразу развили одинаковую скорость 50 км/ч. Они едут в одном направлении без остановок, сохраняя указанную скорость неизменной. С какой скоростью шел встречный поезд, если он повстречал эти поезда через 5 мин один после другого?

Решение.

Пусть x — скорость встречного поезда. Расстояние между другими двумя поездами равно $50\cdot\frac{1}{5}=10$ км. Таким образом, встречный поезд встретился со вторым из этих двух поездов через $\frac{10}{x+50}$ ч после встречи с первым из них. Из условия получаем

$$\frac{10}{x+50}=\frac{1}{12}\Rightarrow x=70.$$

Ответ: 70 км/ч.

13.449. Искомое трехзначное число начинается с цифры 1. Если ее стереть и затем ее же записать в качестве последней цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет больше искомого на $9a^{1/\lg a}$. Найти это число.

Решение.

Если $\overline{1xy}$ — искомое число, то из условия имеем

$$\overline{1xy}=\overline{xy1}-9\cdot a^{\log_a 10}=\overline{xy1}-90 \Leftrightarrow 100+10x+y=100x+10y+1-90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21=10x+y \Rightarrow x=2,\ y=1.$$

Ответ: 121.

13.450. Если при начале отсчета времени было m_0 г вещества A и $2m_0$ г вещества B, то через любое число t лет в результате радиоактивного распада этих веществ останется соответственно $m = m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 t}$ и $M = 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 — постоянные, зависящие от природы веществ. Вычислить период полураспада каждого из этих веществ, т.е. найти, через сколько лет от каждого вещества останется только половина его первоначального количества, если известно, что период полураспада вещества B в два раза меньше, чем вещества A, и что через 20 лет общая масса этих веществ уменьшается в 8 раз.

Решение.

Если x и $2x$ — периоды полураспада второго и первого вещества, то из условия получаем

$$\begin{cases} m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 \cdot 2x} = \dfrac{m_0}{2}, \\ 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 \cdot x} = m_0, \\ m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 \cdot 20} + 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 \cdot 20} = \dfrac{3m_0}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-2\lambda_1 \cdot x+1} = 1, \\ 2^{-\lambda_2 \cdot x+1} = 1, \\ 8 \cdot 2^{-20\lambda_1} + 16 \cdot 2^{-20\lambda_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2x}, \lambda_2 = \frac{1}{x};$$

$$16 \cdot 2^{-\frac{20}{x}} + 8 \cdot 2^{-\frac{10}{x}} - 3 = 0.$$

Пусть $y = 2^{-\frac{10}{x}}$, тогда имеем

$$16y^2 + 8y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2^{-2} \Rightarrow 2^{-\frac{10}{x}} = 2^{-2} \Rightarrow x = 5.$$

Ответ: 10 лет, 5 лет.

Содержание

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Суходский Андрей Матвеевич
Федорова Нина Михайловна

ТВОРЧЕСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Профессор кафедры высшей математики
Белорусского Государственного Университета
Информации и Радиоэлектроники
Карпук Андрей Андреевич

Профессор кафедры высшей математики
Белорусского Государственного Университета
Информатики и Радиоэлектроники
Жевняк Ростислав Михайлович

Кандидат физико-математических наук
Ермолицкий Александр Александрович

Учебное издание

ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ
ГРУППА В

Под редакцией М. И. Сканави

Подписано в печать с готовых диапозитивов 22.04.03.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Бумага типографская. Усл. печ. л. 38,0. Тираж 4000 экз.
Заказ 973.

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001 г.
109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 928-78-26
E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru

ООО «Харвест». Лицензия ЛВ № 32 от 27.08.2002.
РБ, 220013, Минск, ул. Кульман,
д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.

Открытое акционерное общество
«Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
220600, Минск, ул. Красная, 23.